СОЛИТОНИТЕ – ИСТОРИЯ, ТЕОРИЯ И ПРИЛОЖЕНИЯ

Владимир Герджиков*

1. МАЛКО ИСТОРИЯ

Солитоните са един от най-ярките примери, оставили сериозни и трайни последици както в повседневната практика, така и във развитието на съвременната математика и теоретична физика.

Като явление солитонът е бил открит от знаменития шотландски инженер Джон Скот-Ръсел преди повече от 150 години. Станала е вече знаменита публикацията му от онова време – [1], в която той описва ,,раждането" на солитона:

,,... Аз наблюдавах движението на шлепа, теглен по тесния канал от двойка коне, когато изведнаж шлепът рязко спря; масата вода, приведена от него в движение се натрупа около носа й и след това внезапно се понесе напред с голяма скорост с формата на голямо уединено възвишение. Кръглият, гладък и ясно оформен воден хълм продължи да се движи по канала без забележимо изменение на формата или намаляване на скоростта. Аз последвах вълната на кон и когато я настигнах тя все още се движеше напред със скорост осем или девет мили в час, запазвайки първоначалния си профил на възвишение с дължина около 30 фута и височина от фут до фут и половина. Височината й постепенно намаляваше и след като препусках след нея една или две мили я загубих в извивките на канала. Така през август 1834 г. за пръв път случайно се срещнах с това необикновено и прекрасно явление..."

Тук ще направя малко отклонение. През 1982 година в Единбург беше организирана голяма международна конференция посветена на 150-годишнината от откриването на солитона. На нея присъствуваха повече от 200 учени от цял свят изследващи различни теоретични и експериментални аспекти на вълновите взаимодействия във физика на плазмата, нелинейната оптика, свръхпроводимостта и редица други раздели на съвременната физика. При описанието на тези явления наред с уравнението на Кортевег-де Фриз, се появяват и други ,,солитонни" уравнения, като например, нелинейното уравнение на Шрьодингер, уравнението синус-Гордон. В този смисъл те носят

* ст. н. с – 1 ст. дфн, ИЯИЯЕ, БАН

универсален характер. Наред с научните доклади и обсъждания, една от целите на конференцията беше и възпроизвеждането на солитона на Скот-Ръсел. За целта беше избрано същото място на същия канал; имаше конник в парадна униформа, готов да следва възпроизведения солитон до извивките на канала. Имаше приготвена мощна моторница, която трябваше да се засили, после рязко да спре и така да пресъздаде историческия солитон. Уви, мощната моторница явно не можеше да свърши работата на стария шлеп - солитон не се получи. Предполагайки, че лодката не може да спре достатъчно рязко, беше предложено тя да бъде вързана с две въжета, които по даден сигнал да бъдат опънати едновременно от двата бряга. За съжаление и това не помогна, независимо че повече от 20 известни професори теглеха едновременно и с всички сили тези въжета. С толкова по-голямо уважение и тържественост беше открита паметната плоча, увековечаваща откритието и таланта на Скот-Ръсел. Междувременно беше завалял проливен дъжд, но нито конникът в униформа, нито присъствуващите учени му обръщаха внимание.

ПЪРВИ ПРИЛОЖЕНИЯ НА СОЛИТОНА

Скот-Ръсел не само пръв открил експериментално ,,самотната вълна на транслацията", известна понастоящем под името солитон; той пръв използвал и необикновените му свойства. Наистина, дотогава се смятало че водните вълни се образуват от вертикални трептения на водните частици. Очевидно, такива вълни не биха могли да пренасят предмети и енергия на големи разстояния. Новооткритата вълна явно принципно се различавала от тях и несъмнено можела да бъде използвана в корабоплаването.

А ето и първата полза от тази вълна, извлечена от Скот Ръсел. Той разбрал, че съществува скорост, зависеща от дълбочината на канала, при която тегленето на шлеповете става с минимални усилия. По това време по системата от канали, свързващи Единбург с Ливерпул се прекарвали само шлепове, теглени от конски впрягове. При по-рязко потегляне на шлепа се поражда солитон, който носел на ,,гърба" си шлепа и значително облегчавал конете.

Въз основа на своите наблюдения над водните вълни Скот-Ръсел предложил и нова конструкция кораби, плаващи значително по-бързо от старите. Пак той бил човекът, който след редица експерименти предложил реконструкция на каналите от Единбург до Глазгоу, с която ги пригодил за корабоплаване.

Талантът на Скот Ръсел като инженер се изявил и в други направления. Той усъвършенствувал конструкцията на парните котли, използвани за корабни двигатели; предложил корабите с железни корпуси да се правят с двойни дъна, като пространството между тях се разделя на множество херметични камери; създател е на огромния железен купол на Виенската изложба.

Като примери за солитони, които се срещат непосредствено около нас ще спомена най-напред някои морски вълни. Разбира се, за да има солитонен характер вълната трябва да има голяма дължина, много по-голяма от морската дълбочина на даденото място. На снимки от спътник са зафиксирани ясно такива вълни с дължини превишаващи 100 километра и с височина няколко метра. Солитонен характер имат и цунами - огромните вълни които се появяват след земетресение с епицентър в океана. Но като че ли най-старият и най-големият солитон от всички наблюдавани досега и червеното петно на Юпитер. Това петно е известно на астрономите вече от около 200 години, има размери от порядъка на 100,000 километра и практически не променя формата и местоположението си в атмосферата на Юпитер. От по-модерните приложения на солитона ще спомена новият тип оптични кабели. Светлинните вълни, които пренасят информацията по тези кабели, трябва да бъдат максимално близки до солитона. Така се гарантира тяхната устойчивост и надежността на пренесения сигнал.

УРАВНЕНИЕТО НА КОРТЕВЕГ – де ФРИЗ

Първото теоретично изследване на солитоните е било направено в края на миналия век от Кортевег и де Фриз. Те за пръв път извели уравнението, на което се подчиняват водните вълни в тесни и плитки водни басейни KdV. Понастоящем то е едно от най-известните

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - 6\frac{\partial u}{\partial x}u(x,t) = 0 \qquad (1)$$

уравнения в математическата физика. В безразмерни променливи то има вида: Това е частно диференциално нелинейно уравнение за функцията $u(x,t)$, която описва височината на вълната над водната повърхност в зависимост от разположението й по дължината на басейна x и времето t. Членът с третата производна по x отразява

наличието на дисипация при разпространението на вълните. Ако оставим само него, т.е., ако пренебрегнем нелинейните явления дължащи се на вътрешното триене, ще установим че всяка вълна с течение на времето диспергира и изчезва. Отчитането на нелинейните членове води до качествено различен резултат: оказва се че той, при определени начални условия, точно компенсира влиянието на дисперсията и прави възможно съществуването на устойчиви вълни, които могат да се разпространяват запазвайки формата и енергията си. Кортевег и де Фриз намерили и явният вид на тази вълна, известна като солитон:

$$u(x,t) = \frac{-2\eta^2}{\cosh^2(\eta(x-4\eta^2 t))}, \qquad (2)$$

където параметърът η характеризира както амплитудата, така и скоростта ($v = 4\eta^2$) на солитона.

Класът от нелинейни еволюционни уравнения, допускащи решения от типа „бягаща вълна" е доста широк; той включва в себе си и редица уравнения, за които няма точна компенсация между дисперсия и нелинейност. Фактът че за уравнението на КдФ тази компенсация е точна се изразява във факта, че това уравнение притежава и N-солитонни решения със много специални свойства. Изследването на N-солитонните решения позволява да се изясни как си взаимодействуват солитоните.

ВЪЗРАЖДАНЕ НА СОЛИТОНИТЕ

До тук ние употребявахме терминът солитон, който е въведен в литературата едва през 1965 година от Забуски и Крускал – [2]. Нека обясним причината за този дълъг интервал между работата на Кортевег и де Фриз, която скоро ще навърши сто години и модерното развитие на теорията на солитоните. Известно е, че в некролога на Кортевег, издаден от Холандското кралско дружество в края на 40-те, тази негова работа KdV изобщо не се споменава. Понастоящем едва ли ще сгреша, ако кажа че това е най-цитираната му работа, с която той и де Фриз ще останат в съвременната наука.

И така, нека се върнем за малко в началото на нашия век, който по думите на И. М. Гельфанд е век на Ренесанса на математиката. Едно от важните открития в математиката, направено още в началото на века, е

доказателството на теоремата за стохастизацията. Нейният смисъл се състои в следното. Нека разгледаме нелинейна динамична система с много степени на свобода и нека в началния момент t = 0 възбудим само една от тези степени на свобода. Съгласно теоремата за стохастизацията, валидна при достатъчно общи предположения за характера на взаимодействието, съществува критично време $T_{кр}$, след което енергията на началното възбуждане се разпределя равномерно по всички степени на свобода на системата. С други думи, след време $t > T_{кр}$ системата ,,забравя" за началното си състояние и никога повече не се връща към него.

Тъй като уравнението на КдФ е нелинейно, дълго време хората са вярвали, че и за него е справедлива теоремата за стохастизация и не са се занимавали с него. Ето как понякога, високите достижения в една област на науката могат да „забавят" развитието на други нейни области. Фактът, че съществуват нелинейни динамични системи, които не попадат под действието на теоремата за стохастизацията е бил открит значително по-късно и до голяма степен случайно.

В началото на 50-те години Ферми, Паста и Улам – [3] провеждат числен експеримент на новата електронно-изчислителна машина ,,МАНИАК", която току що е била монтирана в Лос Аламоската лаборатория в Калифорния. Те изследват преминаването на кристална решетка към топлинно равновесие. По-конкретно те изследват верижка от N = 64 анхармонични осцилатора (или частици) с еднакви маси m и взаимодействуващи помежду си с нелинейни ,,пружинки". Те приемат, че силата на опъване на ,,пружинките" зависи от разстоянието по закона $F(\Delta) = -K(\Delta+\alpha\Delta^2)$, където K и α са константи. Уравненията на движение имат вида:

$$\frac{m}{K}\frac{\partial y_k}{\partial t^2} = y_{k+1} + y_{k-1} - 2y_k + \alpha\left[(y_{k+1} - y_k)^2 - (y_{k-1} - y_k)^2\right], \qquad (3)$$

като $y_0 = y_N = 0$, т.е., крайните точки са фиксирани.

Нека приведем малък цитат от техния отчет. “*В резултат на нашите пресмятания наблюдавахме явления, които от самото начало ни учудиха. Вместо последователен непрекъснат поток на енергия от първата мода към висшите…ставаше енергообмен само между няколкото низши моди. Почти не се наблюдаваше тенденция за равномерно разпределение на енергията по степените на свобода за*

даденото време. С други думи в системата определено нямаше смесване."

Тези резултати определено противоречат на теоремата за стохастизацията, поради което и предизвикват учудването на Ферми, Паста и Улам. Нека сега да покажем, че тези резултати имат пряко отношение към уравнението на КдФ. За целта да се опитаме да преминем към непрекъснатия предел, като предположим, че разстоянието между частиците е h, променливата x = kh, $y_k(t) = y(t, x)$ и по теоремата на Тейлор $y_{k\pm1}(t) \approx y(x) \pm h\partial y/\partial x$. Като заместим t с $\sqrt{K/mt}$ получаваме:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + 2\alpha h \frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{h^2}{12}\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}, \qquad (4)$$

където са пренебрегнати членовете съдържащи h^3, h^4 и т.н. Ако сега потърсим решения на (4) във вид на прости вълни от вида $y \approx \varphi(X, T)$, където $X = x - t$ и $T = \alpha ht$ след несложни преобразувания получаваме:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial T \partial X} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial X^2}\frac{\partial \varphi}{\partial X} + \frac{h}{24\alpha}\frac{\partial^4 \varphi}{\partial X^4} = 0 \qquad (5)$$

Остава да положим $u = \partial\phi/\partial X$ за да получим уравнението на КдФ, но с други коефициенти пред отделните му членове. Но правейки подходящи замени от вида $u \to c_1 u$, $T \to c_2 t$, $X \to c_3 x$ с подходящ избор на коефициентите c_1, c_2 и c_3 винаги можем да преминем към уравнението на КдФ – (1).

Следвайки тези разсъждения на Крускал и Забуски виждаме, че верижката изследвана от Ферми, Паста и Улам има пряко отношение към уравнението на КдФ и че за това уравнение теоремата за стохастизацията също може да се окаже невалидна.

ДРУГИ ВАЖНИ ПРИЛОЖЕНИЯ

Даже уравнението на КдФ да имаше само чисто математически интерес, то въпросът за пълното описание на решенията му пак би било извънредно важно. Нека напомним, че пълно описание на решенията допреди четвърт век бе известно само за линейни

диференциални уравнения. За тях са добре известни теоремите на Коши-Ковалевская за съществуване и единственост. За съжаление няма аналогични методи и подходи за третирането на нелинейни диференциални уравнения. И онова, което започна с работата на Лакс – [6] през 1967 година може да се смята за сериозен пробив в математиката. С две думи, за пръв път беше предложен метод за пълно описание на решенията на нелинейно диференциално уравнение.

Но това откритие силно заинтересува и физическата общност. Както вече споменахме, уравнението КдФ намира важни приложения във редица области на физиката. То описва определен тип вълнови взаимодействия, които носят универсален характер и се срещат не само в дълги и плитки водни канали, както обяснихме в увода.

Така през 1960 г. Гарднер и Морикава показаха, че уравнението на КдФ се получава като определено приближение от уравненията на Навие-Стокс в хидродинамиката. Така то описва магнитохидродинамични вълни в студена плазма. Понастоящем списъкът на физическите процеси, които се описват с уравнението на КдФ е доста дълъг. То се появява и при изследването на дълги електромагнитни вериги с дисперсия, в нелинейната оптика и другаде (виж например [5]). Наскоро Калоджеро изведе уравнението на КдФ като естествено приближение от най-общо вълново взаимодействие. Всичко това обяснява големият интерес към уравнението на КдФ както от страна на математиците, така и от страна на физиците с най-различни специалности.

Теоремите на Коши-Ковалевская носят абстрактен характер; те не позволяват построяване на решенията в явен вид. Методът на обратната задача, предложен от Лакс за решаването на уравнението на КдФ има преимущество в това отношение. Наред с абстрактното описание на пълния клас от решения на уравнението на КдФ, то позволява в същото време явното построяване на един важен подклас от решения. Това са така наречените солитонни решения.

УРАВНЕНИЕТО НА КдФ – ТОЧНА ТЕОРИЯ

Този параграф е за колегите, имащи по-дълбоки познания по математика, в частност по диференциални уравнения и динамични системи.

ИНТЕГРАЛИ НА ДВИЖЕНИЕТО

Уравнението на КдФ може да се запише като Хамилтоново уравнение на движение така:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \{u, H\} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\delta H}{\delta u(x,t)}, \qquad (6)$$

където частната производна по x играе ролята на скобка на Поасон, а Хамилтонианът H е равен на:

$$H = -\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}u(x,t) - 2u^3(x,t)\right)dx,$$

През 60-те години в серия от работи колективът от американски математици Гарднер, Грийн, Крускал и японецът Миура проведоха задълбочени изследвания на уравнението на КдФ. Те установиха освен стандартните за този тип уравнения закони за запазване: плътност I_{-1}, импулс I_0, енергия $I_1 = -H/2$:

$$2I_{-1} = -\int_{-\infty}^{\infty} u(x,t), \qquad 2I_0 = \int_{-\infty}^{\infty} u^2(x,t)dx, \qquad I_2 = -H/2,$$

то има и висши закони за запазване. Като пример за такъв закон ще посочим:

$$I_2 = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}u(x,t) - 5\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}u^2(x,t) + 5u^4(x,t)\right)dx,$$

Проверката, че I_{-1}, I_0, I_1 и I_2 наистина не зависят от времето ако u(x, t) удовлетворява (1) не е сложна. За целта е достатъчно да диференцираме съответното I_k по t под знака на интеграла и да заменим навсякъде $\partial u/\partial t$ с $-\partial^3 u/\partial x^3 - 6u\,\partial u/\partial x$. Несложни пресмятания ни позволяват да се убедим, че под знака на интеграла винаги се появява пълна производна по x от полином на u и нейните

производни по x, така че интегрирането се извършва явно. Накрая трябва да отчетем, че функцията $u(x,t) \to 0$ при $x \to \pm\infty$.

Това беше една от причините, които привлякоха интереса на математиците към това уравнение. Първоначално един по един бяха извеждани законите за запазване от шести, осми, десети ред*. По-късно те намериха рекурентна процедура за построяването на I_k при всяко $k > 0$. Така те успяха да докажат едно от първите изключителни свойства на уравнението на КдФ - факта, че то има всъщност безкрайно много интеграли на движението.

МЕТОД НА ОБРАТНАТА ЗАДАЧА

Работите на Гарднер, Грийн, Крускал и Миура послужиха за основа на пионерската работа на Лакс – [6], с която бе предложен първият метод за точно решаване на нелинейни еволюционни уравнения - методът на обратната задача на разсейването. Лакс доказа, че ако разгледаме решението на КдФ u(x, t) като потенциал в оператора на Щурм-Лиувил:

$$L\psi(x,t,k) = \left(-\frac{\partial^2}{\partial x^2} + u(x,t) - k^2\right)\psi(x,t,k) = 0, \qquad (7)$$

то зависимостта на спектралните данни на (7) от времето ще бъде много проста. В частност, коефициента на преход $\alpha(k)$ не зависи от t и може да се разглежда като пораждащ функционал на законите за запазване I_k. Наистина, в сила е формулата:

$$\ln a(k) = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{2I_{s-1}}{(2ik)^s}.$$

Зависимостта на коефициента на отражение $\rho(k, t)$ от формулата t се определя от $\rho(k, t) = \rho(k, 0)\exp(8ik^3t)$.

Така, за да решим уравнението на КдФ с начално условие $u(x, 0) = u_0(x)$ можем да използуваме следната схема, състояща се от три стъпки. При първата стъпка разглеждаме началното условие $u_0(x)$ като

* Под ред на закона разбираме максималния ред на производната на u, която влиза в I_k.

потенциал в оператора на Щурм-Лиувил и по него построяваме съответният коефициент на отражението $\rho(k, 0)$. Втората стъпка, намирането на $\rho(k, t)$ е тривиална благодарение на откритието на Лакс. При третата стъпка по вече известния коефициент на отражението $\rho(k, t)$ трябва да възстановим потенциалът $u(x, t)$ при $t > 0$, с което получаваме и решението на уравнението на КдФ. Първата и третата стъпки са добре изследвани в литературата. Те са известни като правата и обратната задача на разсейването за оператора на Щурм-Лиувил. Те се свеждат до решаването на линейни интегрални уравнения, за които се знае че имат еднозначно решение. По този начин нелинейната задача на Коши за уравнението на КдФ беше сведена до три линейни задачи.

Нелинейното преобразование от потенциала $u(x, t)$ към коефициента на отражението $\rho(k, t)$ линеаризира уравнението на КдФ. Може да се докаже, че това преобразование е нелинеен аналог на обикновеното преобразование на Фурие. То ни позволява да извършим смяна на променливите и вместо $u(x, t)$ да разглеждаме спектралните характеристики на L.

Операторът L на Щурм-Лиувил върху цялата ос $-\infty < x < \infty$ в общо положение има както непрекъснат спектър, запълващ реалната ос от комплексната k-плоскост, така и дискретен спектър, състоящ се от краен брой чисто мними собствени стойности. N-солитонните решения на уравнението на КдФ съответствуват на оператори L, които имат N дискретни собствени стойности и за които $\rho(k, t) = 0$ върху непрекъснатия спектър. Такива потенциали са били въвеждани още от Баргман и са известни като безотражателни.

ПЪЛНА ИНТЕГРИРУЕМОСТ НА УРАВНЕНИЕТО НА КдФ

От механиката е добре известна теоремата на Лиувил, която предлага критерий за пълна интегрируемост на крайномерни Хамилтонови системи. Той изисква системата да притежава толкова интеграли на движението в инволюция, колкото са степените на свобода на системата. Вече споменахме, че уравнението на КдФ описва хамилтонова система, чиито степени на свобода са безкрайно много; те се описват не с краен брой променливи, а с цяла функция $u(x, t)$. Видяхме също, че тази система притежава безкрайно много интеграли на движението, за които може да се покаже че са в инволюция помежду си. От това обаче не следва автоматически, че можем да приложим теоремата на Лиувил и да кажем, че уравнението на КдФ е

напълно интегрируема система. Строгото доказателство на този факт, предложено от Захаров и Фаддеев – [8], изисква да се докаже, че това са всички интеграли на движението.

В своето доказателство Захаров и Фаддев намериха в явен вид наборът от променливи, известни като променливи действие-ъгъл.

Наистина, те положиха:

$$n(k) = -\frac{2k}{\pi}\ln(1-|\rho(k)|^2), \qquad \phi(k) = \arg b(k),$$
$$n_j = \eta_j^2, \qquad \phi_j = -2\ln|b_j|, \qquad j = 1,\dots,N,$$

където b(k, t) = α(k)ρ(k, t), iη$_j$ са собствените стойности на оператора L а $b_j(t)$ характеризират нормата на съответните собствени функции на L.

Променливите са канонични по отношение на скобките на Поасон:

$$\{n(k),n(k')\} = \{\phi(k),\phi(k')\} = 0, \qquad \{n(k),\phi(k')\} = \delta(k-k'),$$
$$\{n_j,n_m\} = \{\phi_j,\phi_m\} = 0, \qquad \{n_j,\phi_m\} = \delta_{jm},$$

където δ_{jm} е символът на Кронекер, а δ(k - k′) е делта-функцията на Дирак. По-задълбочени изследвания позволяват да се убедим, че интегралите на движение I_k се изразяват само чрез ,,половината" от променливите n(k), n_j, които се наричат променливи от типа действие:

$$2I_s = \frac{2^{2s+3}}{2s+3}\sum_{j=1}^{N} n_j^{s+3/2} + (-1)^s 2^{2s+1}\int_{-\infty}^{\infty} k^{2s+1} n(k)dk.$$

Тъй като Хамилтонианът H = -2I_1 от хамилтоновите уравнения на движение (6) и от (9) получаваме, че уравнението на КдФ е еквивалентно на:

$$\frac{\partial n(k,t)}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial \phi(k,t)}{\partial t} = 8k^3, \quad \frac{dn_j}{dt} = 0, \quad \frac{d\phi_j}{dt} = -16\eta_j^{3/2},$$

т.е., променливите от типа действие не зависят от времето, а променливите от типа ъгъл φ(k, t), $\varphi_j(t)$ са линейни функции на t.

СОЛИТОННИ РЕШЕНИЯ И ТЯХНОТО ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ

Пълната интегрируемост на уравнението на уравнението на КдФ лежи в основата на всички изключителни свойства на това уравнения. В частност то, определя следното изключително свойство на солитонните решения на уравнението на КдФ, а именно, те допускат само чисто еластично взаимодействие. Това означава, че се запазва не само броя на солитоните и общата им енергия, а се запазват индивидуалните импулси и форми на солитоните. При взаимодействието им се променя само относителното положение на центровете на тежестта на отделните солитони.

Физически можем да си представим, че при времена близки към -∞ тези солитони са на големи разстояния един от друг и са подредени така, че най-бавният е най-отпред, а най-бързият - най-отзад. Това, че те са далеч един от друг позволява да ги третираме като невзаимодействуващи помежду си обекти. Нека разгледаме такава конфигурация като начално условие в уравнението на КдФ и да видим как ще еволюира такова решение с времето. Разбира се, това не е толкова просто, тъй като уравнението на КдФ е нелинейно уравнение и сумата от две решения не е решение на уравнението. Строг анализ, основан на вече добре развитият метод на обратната задача позволява на този въпрос да се даде точен отговор. Неговата същност е следната: при времена клонящи към ∞, N-солитонното решение се разпада отново на сума от N едносолитонни решения, които имат същите скорости и амплитуди. Единствената разлика между началното и крайното състояния се състои в това, че техните центрове на тежестта са отместени.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

С това приключваме този бегъл обзор за основните свойства на солитоните. Всички наши разглеждания се отнасяха до уравнението на КдФ, тъй като исторически то беше първото нелинейно диференциално уравнение с важни приложения във физиката, което беше точно интегрирано. Няколко години след работата на Лакс учените го разглеждаха като рядък и може би единствен математически феномен.

През 1971 година обаче се появи пионерската работа на Захаров и Шабат – [7] , в която беше доказана пълната интегрируемост на друго, не по-малко фундаментално за физиката нелинейно уравнение:

нелинейното уравнение на Шрьодингер. Тази работа послужи като сигнал и десетки нови изследователи се включиха в надпреварата за откриване на нови „солитонни" уравнения. И техният списък бързо нарастваше: уравнението синус-Гордон, решено почти едновременно от Фаддеев и Тахтаджян и американската група Абловиц, Кауп, Нюел и Сигур; уравнението на n-те вълни, решено от Захаров и Манаков; уравненията на главното кирално поле, решено от Михайлов и Захаров; верижката на Тода, решена от Флашка и Манаков и много, много други. Понастоящем броят на решените нелинейни уравнения, намиращи приложения в различни области на физиката със сигурност наброява няколко десетки.

От математическа гледна точка, само с оператора на Штурм-Лиувил е свързан клас от безкрайно много точно решаеми нелинейни еволюционни уравнения; всяко от тях се характеризира със свой Хамилтониан, като за такъв можем да изберем кой да е интеграл на движението I_k или тяхна линейна комбинация. Уравнението на КдФ е само един представител на този клас уравнения. Цитираните по-горе уравнения се решават точно прилагайки метода на обратната задача не към оператора на Штурм-Лиувил, а към други подходящо избрани диференциални оператори. Така всяко от тях може да се разглежда като отделен представител на цял клас от безкрайно много солитонни уравнения. Тяхното изследване изисква допълнителни усилия, но се отплаща с интересни нови свойства, както от математически характер така и с физически важни последствия. За тях ще разкажа друг път. А за онези, които желаят да научат повече за теорията на уравнението на КдФ и за солитоните бих препоръчал и книгата - [9].

Литература

1. J. S. Russell. Report on waves. - British Association Reports (1984).
2. D. J. Korteweg, G. de Vries. Philos. Mag. **39**, 422 (1985).
3. E. Fermi, J. Pasta, S. Ulam. Studies of Nonlinear Problems. I. Los Alamos report LA 1940, (1955). Превод на руски можете да намерите в книгата Е. Ферми. Научные труды. т. II. - М., Наука (1972), стр. 643.
4. N. J. Zabusky, M. D. Kruskal. Phys. Rev. Lett. **15**, 240 (1965).
5. К. Лонгренн, Э. Скотт. Солитоны в действии. Издательство Мир, Москва (1981).

6. P. D. Lax. Commun. Pure Appl. Math. **21**, 467 (1968).
7. В. Е. Захаров, А. Б. Шабат. ЖЭТФ **61**, \No 1 стр. 118 (1971).
8. В. Е. Захаров, Л. Д. Фаддеев. Функц. анализ и его приложения , \No 4, стр. 18 (1971).
9. В. Е. Захаров, С. В. Манаков, С. П. Новиков, Л. П. Питаевский. Теория солитонов: Метод обратной задачи. М.: Наука, (1980).