

## Каква е размерността на нашата Вселена?<sup>1</sup>

### П. Бинетрюи

Въпреки че идеята за допълнителни пространствени измерения може да изглежда заимствана от света на научната фантастика, през последното столетие физиците все повече и повече бяха завладявани от идеята, че би могло да има няколко компактни измерения. Разбира се, не става дума за трите измерения, с които сме свикнали, а за нови, които са с толкова микроскопични размери, че не можем да бъдем уверени в тяхното съществуване, докато не проучим микрофизиката.

Първите стъпки в тази посока принадлежат на Т.Калуца [1] и О. Клайн [2] през 20-те години на 20. век. Техните идеи се основават на следната аналогия: в общата теория на относителността разстоянията зависят локално от гравитационния потенциал; следователно можем да си представим нови измерения, в които обобщеното разстояние зависи също и от електромагнитния потенциал. Това би могло да доведе до обединяване на теориите на гравитацията и на електромагнетизма и незабавно привлича вниманието на Айнщайн [3].

По-конкретно, през 1905 г. специалната теория на относителността представи инвариантното разстояние между две близки точки в пространство-времето във вида:

$$ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2.$$

В общата теория на относителността през 1917 г. вече пространство-времето е изкривено от гравитационния потенциал:

$$ds^2 = -(1 - 2\Phi_g + 2\beta\Phi_g^2)dt^2 + (1 - 2\gamma\Phi_g)(dx^2 + dy^2 + dz^2),$$

където  $\Phi_g$  е гравитационният потенциал, а  $\beta$  и  $\gamma$  са пост-Нютонови параметри съгласно с ранната формулировка на Едингтон (1922). Калуца и Клайн въвеждат едно пето измерение, характеризиращо се с координата  $x_5$ . Електромагнитният потенциал “изкривява” точно това допълнително пространствено измерение:

$$ds^2 = -(1 - 2\Phi_g + 2\beta\Phi_g^2)dt^2 + (1 - 2\gamma\Phi_g)(dx^2 + dy^2 + dz^2) - \Phi_e dt dx_5 + \vec{A} \cdot d\vec{x} dx_5 + dx_5^2,$$

където  $\Phi_e$  и  $\vec{A}$  са скаларният и векторният потенциал на електромагнитното поле.

Тази идея бе възродена по-късно в контекста на теорията на струните. Основните обекти в тази теория не са точкови, а имат един пространствен размер: те представляват микроскопични отворени или затворени струни. Надеждата е, че това тяхно свойство ще реши един от проблемите на гравитацията на квантово равнище – появата на безкрайности, свързани с поведението на малки разстояния (при високи енергии или поведение в ултравиолетовата област). Това би могло да стане обаче само ако симетриите в теорията на струните са строго спазени на квантово равнище, а това пък от своя страна е възможно само при специален брой на пространствените измерения.

Обикновено се предполага, че допълнителният брой пространствени измерения са компактни и микроскопични: една горна граница на техния размер от  $10^{-16}$  m произлиза от факта, че днес чрез ускорителите на елементарни частици физиката е проверена до такива разстояния и няма и намек за съществуването на такива измерения. Ще видим обаче, че това твърдение би трябвало да бъде малко смекчено: експериментите във физиката на високите енергии използват за изучаване на частиците само силното и електрослабото взаимодействие. Следователно в случай, че допълнителните измерения са чувствителни само към гравитационното взаимодействие, наложените от физиката на високите енергии ограничения са неприложими [4]. Наистина до съвсем скоро за малки разстояния законите на гравитацията бяха проверени само до милиметровата област. Това означава, че и

<sup>1</sup> Превод от *Europhysics News*, 33, 2, 2002.

горната граница за размерите на допълнителните измерения е от същия порядък, т.е. тя може да се окаже макроскопична величина!

Нека спрем за момент и погледнем по-отблизо как би изглеждал светът в този случай: доколкото негравитационните взаимодействия (както и веществото) не “чувствуват” допълнителните измерения, това означава, че нашият обикновен свят от кварки, лептони и калибровъчни взаимодействия е локализиран върху една 4-мерна повърхност (описвана с три пространствени и една времева координата), която е потопена в една вселена с по-голям брой измерения. Такава повърхност се нарича *брана*, или по-точно – 3-брана (три пространствени измерения): терминът брана очевидно е свързан с термина мембрана (говорейки по-точно, една обикновена мембрана представлява 2-брана). Следователно нашият наблюдаем свят е “залепен” към браната и само гравитацията е в състояние да сондира по-високоразмерния свят извън нея. Подобна ситуация вече бе срещана в контекста на теорията на струните, от където е заимстван терминът *брана*: там браните се появяват като повърхности, описвани от краищата на отворените струни [5]. В такъв случай не е необходимо допълнителните измерения да имат краен размер, тъй като нашите сетива както и нашите оптични и електромагнитни уреди изследват само обикновените 4 измерения. По-нататък ще говорим за тази ситуация като за свят на браните и за допълнителни измерения по Калуца–Клайн – в случая, когато те могат да бъдат изследвани негравитационно.

### **Как би могло да се установи съществуването на допълнителни измерения?**

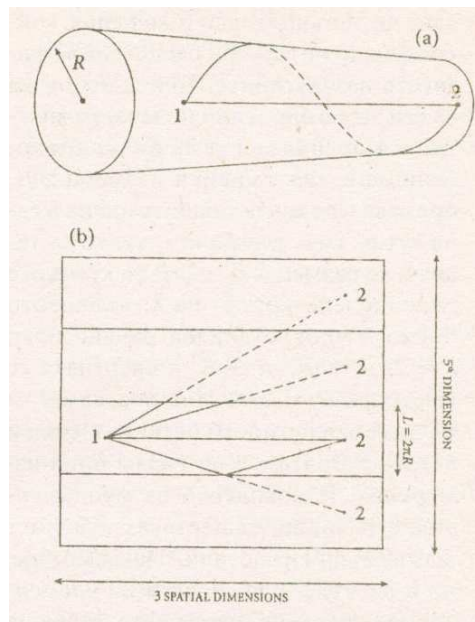
Първият тест, за който може да се мисли, е да се провери как гравитационната сила намалява с увеличаване на разстоянието. Наистина, законът за зависимостта от разстоянието е очевидно свързан с броя на измеренията на пространството. Доколкото една сфера в 3-мерното пространство (4-мерното пространство-време) има площ, пропорционална на квадрата от радиуса, далечният ефект от всеки точков източник (независимо от това, дали става дума за водна пръскачка, електрична сила, произлизаща от точков заряд или гравитационно привличане от точкова маса) намалява обратно пропорционално на квадрата от разстоянието. Това е същността на прочутия закон за силата на гравитационното привличане между две маси  $m_1$  и  $m_2$ , намиращи се на разстояние  $r$  една от друга:

$$(1) \quad F(r) = G_{(4)} \frac{m_1 m_2}{r^2},$$

където  $G_{(4)}$  е константата на Нютон.

Една сфера в  $(3 + D)$ -мерно пространство ( $(4 + D)$ -мерно пространство-време) има площ, пропорционална на  $(2 + D)$ -та степен на радиуса, така че можем да очакваме, че гравитационната сила в това пространство ще намалява като  $r^{-(2+D)}$ . По принцип това би трябвало да бъде достатъчно за отхвърляне възможността за допълнителни измерения.

Човек обаче трябва да бъде внимателен в случая на компактни измерения, когато разстоянието е голямо в сравнение с размера  $L$  на компактното (или компактните) измерения. Да обсъдим по-подробно какво би се случило, ако имаме едно допълнително компактно измерение. Ние моделираме подобен свят с безкрайния тор от фиг. 1,а: безкрайното измерение представя кое да е от трите стандартни безкрайни измерения, които наблюдаваме, докато компактното измерение е онагледено с окръжността с дължина  $L = 2\pi R$ . Да разгледаме две маси  $m_1$  и  $m_2$ , намиращи се върху този тор на разстояние  $r$  една от друга. Една гравитационна силова линия може да ги свърже директно, но може и след като направи една или повече обиколки около тора. Следователно (вж. фиг.1,b, където торът вече е представен със серия от ивици със



Фиг. 1.

съответните отъждествявания) масата  $m_1$  чувства ефекта от наличието на масата  $m_2$  и от всички нейни *изображения*. Ако  $r$  е много по-голямо от  $L$ , тогава тези изображения образуват непрекъсната линия. В случая на  $D$  компактни измерения се получава  $D$ -мелен континуум от маси. Тогава гравитационната сила, упражнявана от този континуум върху масата  $m_1$ , е:

$$(2) \quad F(r) = G_{(4+D)} \frac{m_1 m_2}{r^2 L^D}$$

и приема стандартната форма (1), ако направим отъждествяването:

$$(3) \quad G_{(4)} = \frac{G_{(4+D)}}{L^D} .$$

По такъв начин, когато разстоянията, на които изследваме гравитацията, станат от порядъка или по-малки от  $L$ , законът за гравитацията в многомерното пространство ще се окаже от вида  $r^{-(2+D)}$ . Следователно все още могат да се очакват отклонения от стандартния закон при достатъчно малки разстояния.

Съществува и друг начин за откриване на допълнителни измерения, който води до интересни следствия за физиката на частиците. Той се основава на факта, че едно (или повече) компактни измерения могат да бъдат уподобени на кутия с крайни размери. Добре известно е, че стоящите вълни в една кутия имат дължини  $\lambda$ , които са такива, че размерът  $L = 2\pi R$  на кутията е целочислено кратен на  $\lambda$ : вълновото число  $k$  удовлетворява равенството  $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{n}{R}$ ,  $n \in Z$  и енергията се квантува:  $E = \hbar c k$ . Ние

очакваме, че същите зависимости остават в сила и когато кутията е с по-голям брой измерения. И доколкото на фундаментално равнище съществува дуалност между вълни и частици, очакваме още, че и спектърът на масите на елементарните частици ще има характера на спектъра на стоящите вълни в кутията, т.е. ще бъде дискретен и квантът на масата ще бъде  $1/R$ . Тези осцилаторни моди се наричат моди на Калуца–Клайн и учените усилено ги търсят с помощта на съвременните ускорители при високи енергии.

Нека сега разгледаме нещата малко по-конкретно и случая на едно допълнително измерение. Стандартната формула за енергията на една релативистична

частица с 3-мерен импулс  $\vec{p}$  и маса  $m_0$ :  $E^2 = \vec{p}^2 c^2 + m_0^2 c^4$ , в случая на 5 измерения има вида:

$$E^2 = \vec{p}^2 c^2 + p_5^2 c^2 + m_0^2 c^4,$$

където  $p_5$  е импулсът в петото пространствено измерение, който се квантува в съответствие с казаното по-горе:  $p_5 = \hbar k_5 = n\hbar R$ . Следователно в отправна система с начало в центъра на масите ( $\vec{p} = 0$ ) спектърът на енергията е:

$$E^2 = \left[ m_0^2 + \frac{n^2 \hbar^2}{R^2 c^2} \right] c^4.$$

И така, едно 5-мерно поле се идентифицира в 4-мерния свят с една съвкупност от частици, квадратите от масите на които се различават с постоянна величина и тази величина е обратно пропорционална на квадрата от размера на компактното измерение. Това може да се изкаже и по друг начин: ако светът наистина бе 5-мерен, и петото измерение има краен размер, би трябвало да очакваме освен електрона да открием и цяла редица електроноподобни състояния със същите свойства (спин, заряд...) освен масата: разликата между масата на първото от тези допълнителни състояния и масата на електрона би била обратно пропорционална на квадрата от размера на петото измерение. Това са модите на Калуца–Клайн за електрона. Поради техния характеристичен спектър, откриването им би било драматично указание, че живеем в един свят с по-голям брой измерения.

Какво ни казва експериментът по този повод? Доколкото не са наблюдавани отклонения от закона за гравитацията и не са открити моди на Калуца–Клайн, единственото, което можем да направим, е да укажем границите, в които би могъл да се намира размерът  $R$  на допълнителните измерения. Трябва да разгледаме два различни случая:

– Ако допълнителното измерение “се чувства” от негравитационните взаимодействия, т.е. ако модите на Калуца–Клайн участват в електромагнитното, силното или слабото взаимодействие, те биха могли да бъдат открити в ускорителите при високи енергии [6]. Фактът, че тези моди не са наблюдавани и при най-високите днес достижими енергии, дава една долна граница на техните маси и една горна граница за  $R$ :

$$\frac{\hbar c}{R} > 1 \text{ TeV} \quad \rightarrow \quad R < \frac{\hbar c}{1 \text{ TeV}} \sim 10^{-19} \text{ m.}$$

– Ако модите на Калуца–Клайн участват само в гравитационното взаимодействие, т.е. ако живеем върху една брана, както кратко бе дискутирано по-горе, тяхното гравитационно взаимодействие би било твърде слабо и би било твърде лесно да не ги забележим при експерименталните изследвания (но виж и по-долу!). Единствената граница в този случай се определя от пряката проверка на закона за гравитацията. Доколкото той е проверен само за разстояния, не надминаващи 1 mm, то:

$$R < 1 \text{ mm} \quad \rightarrow \quad \frac{\hbar c}{R} > 10^4 \text{ eV.}$$

### Гравитацията и другите фундаментални взаимодействия

Гравитацията е най-слабото от всички известни фундаментални взаимодействия. Това твърдение може да бъде казано и в термините на мащабите на енергията, характерна за всяко взаимодействие.

В случая на силното взаимодействие, което удържа заедно кварките в един протон, можем да приемем като типичен за мащаба на енергиите мащаба, определен от масата на протона,  $1 \text{ GeV}/c^2$ : масите на кварките са пренебрежимо малки и голямата част от масата на протона се дължи на енергията на връзката.

За електрослабото взаимодействие може да се вземе масата на междинните векторни бозони, които са посредници на това взаимодействие – примерно  $100 \text{ GeV}/c^2$ . Като алтернатива за стойност на скаларното поле във вакуум може да се приеме кръгло  $250 \text{ GeV}$ .

Гравитацията се характеризира с размерна константа:

$$G_{(4)} \cdot 6,673 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}.$$

Тя може да се превърне в енергетичен мащаб, ако се използва константата на Планк  $\hbar$  и скоростта на светлината  $c$ . Така се получава Планковата маса:

$$(4) \quad M_{Pl} = \sqrt{\frac{\hbar c}{G_{(4)}}} \sim 1,22 \cdot 10^{-19} \text{ GeV}$$

(около  $10^{-8} \text{ kg}$ ). Присъствието на константата на Планк показва, че Планковият мащаб дава мащаба на енергиите, при които *квантовите* ефекти стават съществени за гравитацията.

Следователно съществува една разлика от 17 порядъка между фундаменталните енергетични мащаби на гравитацията и на познатите калибровъчни взаимодействия. Оттук произлизат някои тънки проблеми, свързани с разглеждане на ефекта от гравитационните квантови флукутации върху стандартните “нискоенергетични” параметри (например масата на частицата на Хигс).

Допълнителните измерения могат да доведат до нов подход към този въпрос. Наистина в този случай като фундаментална константа на връзката за гравитационното взаимодействие трябва да се вземе константата на Нютон за повече измерения –  $G_{(4+D)}$ , а не тази за четиримерното пространство-време ( $G_{(4)}$ ). Ако, както в (4), използваме тази константа за определяне мащаба на фундаменталната маса  $M_f$ , получаваме:

$$G_{(4+D)} \equiv \frac{(\hbar c)^{D+1}}{c^{2D} M_f^{D+2}} \quad \text{и} \quad M_{Pl}^2 = M_f^{D+2} \left( \frac{Lc}{\hbar} \right)^D.$$

Следователно, колкото по-голям е размерът на компактното измерение, толкова по-малък би бил фундаменталният мащаб. Така например при  $D = 2$  милиметрова стойност на измерението би довело мащаба на  $M_f$  в областта на  $\text{TeV}$ . Как би могло това да се открие опитно?

### Опитно определяне размера на компактните измерения

При протон–протонно разсейване при много високи енергии, каквото ще може да се осъществи в ЦЕРН на големия адронен колайдер, се осъществяват удари между съставките на протоните (кварки и глюони). Едно от възможните крайни състояния се състои от кварк и гравитон: кваркът се адронизира и ражда струя от частици и гравитонът се измъква в допълнителните измерения на пространството, без да бъде регистриран. Така бихме получили струя от частици плюс липсваща енергия. Ако  $M_f$  е в областта на  $\text{TeV}$ , сигналът, дължащ се на наличие на допълнителни измерения, може да надмине фона на стандартния модел при голяма напречна енергия на струята.

Един спорен въпрос, който бе обсъждан обстойно напоследък, е съществуващата вероятност за получаване с ускорителите на микроскопични черни дупки. Това е възможно, ако измеренията са достатъчно големи, така че фундаменталният гравитационен мащаб  $M_f$  да бъде в областта на  $\text{TeV}$ .

От гледна точка на астрофизиката е налице едно силно ограничение заради свръхновите звезди. След експлозия на свръхнова охлаждането се осъществява чрез освобождаване на енергия главно в неутрино и гравитационни вълни. Ако наличието на допълнителни измерения се търси чрез изследване на гравитацията, гравитационните вълни разполагат с по-голямо фазово пространство и охлаждането се ускорява. Оттук

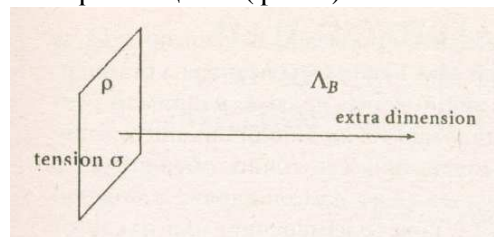
идва долна граница за  $M_f$  от порядъка на 50 TeV, което, за най-простите модели, намалява шансовете на опитите с ускорители.

Накрая, големи усилия се влагат в опитите да се подобрят границите на валидност на закона за гравитацията. Обмислят се сложни експериментални системи, които би трябвало да позволят достигане на границата от няколко микрометра [7]. Един от проблемите е да се различи новият ефект, дължащ се на допълнителните измерения, от ефекта на Казимир, дължащ се на квантовите флуктуации в областта между двете взаимодействащи маси.

### Космология в света на браните

Освен изстрелването на гравитони в допълнителните измерения с помощта на ускорители на елементарни частици *a priori* съществува и друг, по-спокоен начин за търсене на тези измерения – това е наблюдаването на звездите и изследване на еволюцията на нашата собствена Вселена. Наистина, щом наличието на допълнителни измерения изменя гравитацията драстично, би могло да се очаква, че се променя и космологичната еволюция на Вселената.

Нека разгледаме един модел на 4-мерна вселена-брана, потопена в 5-мерен свят; материята и калибровъчните взаимодействия (а следователно и галактиките, фотоните и т.н.) са локализирани върху повърхността, върху браната, докато петото измерение (*обемът*) е достъпно само за гравитацията (фиг. 2).



Фиг. 2.

Свикнали сме с факта, че нашата Вселена е изкривена (поне локално) от всяко гравитационно поле, породено от някаква маса. Това е идеята за вътрешно кривина, която може да бъде “наблюдавана” при успоредно пренасяне на един вектор по затворена крива и установяване дали той се е променил при връщането му в началната точка. Съществува обаче и представата за външна кривина, която съответства на нашето наивно разбиране за “изкривеност”: начинът, по който е огънат един лист хартия, например. Следователно съществува фундаментална разлика между една 4-мерна вселена и една 4-мерна вселена-брана, потопена в 5-мерен свят: във втория случай начинът, по който 4-мерната брана е огъната в 5-мерния обем има определени физични последици.

Едно от тях е космологично по своята природа. Скоростта на разширяване на Вселената се измерва чрез константата на Хъбл  $H$ . В един стандартен 4-мерен свят  $H^2$  е линейна функция на общата плътност на енергията  $\rho$ : това е уравнението на Фридман. Оттук следва, че в една вселена, в която доминира лъчението, каквато е била нашата по време на нуклеосинтеза, космическият мащабен фактор (който е мярка за увеличаване на разстоянията във Вселената) зависи от времето като  $\sqrt{t}$ . В разглежданата 4-мерна вселена-брана, потопена в пространство с повече измерения,  $H^2$  е пропорционално на  $\rho^2$  – на *квадрата* от плътността на енергията върху браната [8]. Това би довело до по-бавно разширяване (космическият мащабен фактор в доминирана от лъчение вселена би бил пропорционален на  $t^{1/4}$ ) в противоречие с това, което се наблюдава от епохата на нуклеосинтеза насам. Решението е да имаме постоянна част в плътността на енергията върху браната: тази енергия на вакуума се интерпретира като повърхностно

напрежение  $\sigma$  на браната. Тогава  $H^2$  е пропорционално на  $(\sigma + \rho)^2$ : плътността на енергията намалява с времето и в по-късните моменти, когато  $\rho$  е достатъчно малко, отново се възстановява линейната зависимост от  $\rho$ . От друга страна, членът, пропорционален на  $\rho^2$ , е важен по време на най-ранната вселена.

Един важен въпрос е този за космологичната константа. Добре известно е, че в 4-мерния свят тази константа не е нищо друго, освен енергията на вакуума. Това е източник на значителен космологичен проблем: очаква се тази енергия на вакуума да бъде от порядъка на фундаменталните мащаби в микроскопичната теория, а това надминава с много порядъци ограниченията, налагани от наблюденията.

Върху разглежданата вселена-брана космологичната константа  $\lambda$  се определя от две събираеми: както току що видяхме, едното е квадратична функция от напрежението на браната (т.е. енергията на вакуума), а другото е линейна функция на обемната плътност  $\Lambda_B$  на вакуумната енергия в 5-мерното пространство:

$$\lambda = \frac{\sigma^2}{36M_f^2} + \frac{\Lambda_B}{6M_f^3}.$$

По такъв начин една изчезваща (или много малка) космологична константа изисква съгласуване между двете енергии на вакуума: това е стандартният проблем за настройката между константите. Ако допуснем наличието на подобна фина настройка, получаваме голям подарък: можем да допуснем, че допълнителните измерения са безкрайни. Наистина, ако напрежението на браната е положително, съществува решение на уравненията на Айнщайн, за което 5-мерната геометрия е “затворена”. И това решение има следното свойство: измежду модите на Калуца–Клайн на 5-мерния гравитон съществува безмасова мода, локализирана върху 4-мерната брана [9]. Тя се интерпретира като 4-мерен гравитон. Заради локализацията 4-мерната гравитация става бързо пренебрежимо малка с отдалечаване от браната. Трябва да се отбележи обаче, че въпреки че допълнителното измерение е безкрайно, неговият обем остава краен, тъй като геометрията му е “затворена”. Този модел, моделът на Рандал–Съндъръм [10], предизвика бурна активност сред физиците през последните години.

Разбира се, бяха изследвани и много други аспекти на космологията на такава вселена-брана и обзорът им излиза извън целите на тази статия. Нека само споменем изследванията, които се извършват с цел да се получат определени предсказания относно флукуациите в космичното реликтов лъчение. Трудността тук идва от факта, че 4-мерната брана не образува затворена система: тя например е подложена на влиянието на обемните възбудени моди, каквито са гравитационните вълни.

Остава да се види дали общата нова перспектива ще осигури решения на старите проблеми. Възможно е да се загубят някои от успехите на стандартния 4-мерен подход, например обединяването на калибровъчните взаимодействия (по-точно, обединението изглежда по-комплицирано в моделите с повече измерения) или някои от неговите ръководни принципи (ренормируемостта). Затова е важно да се види какво се печели в далечна перспектива. В този момент допускането на допълнителни измерения осигурява основа за вълнуващи нови идеи, които са (или би трябвало да бъдат) в съответствие с една последователна квантова рамка, теория на струните. Допълващите се подходи на физиката на високите енергии, астрофизиката и космологията трябва да ни осигурят пътища за експериментална проверка на тези идеи.

#### Литература

1. T. Kaluza, *Sitzungsberihetq Preussische Akademie der Wissenschaften* (1921) 966.
2. O. Klain, *Z. Phys.* 37 (1926) 895.
3. A. Pais, *Subtle is the Lord*, Oxford Univ. Press.
4. N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos and G. Dali, *Phys. Rev. D* 59 (1999) 086 004.

5. J. Polchinski, *rev. Mod. Phys.*, 68 (1996) 1245.
6. I. Antoniadis, *Phys. Lett. B* 246 (1990) 377.
7. <http://mist.mpl.washington.edu/eotwash/>.
8. P. Binetruy, C. Defayet and D. Langlois, *Nucl. Phys. B* 565 (2000) 2629; P. Binetruy, C. Defayet, U. Elwanger and D. Langlois, *Phys. Lett. B* 477 (2000) 285.
9. V. A. Rubakov and M. E. Shaposhnikov, *Phys. Lett. B* 125 (1983) 139.
10. L. Randall and R. Sundrum, *Phys. Rev. Lett.* 83 (1999) 4690.