

Ферми-задачи

Енрико Ферми е прочут със способността си да прави наум или, както се казва – на пръсти – пресмятания, които дават оценка за порядъка на величините, чието пресмятане изисква сложни математически операции. Той е също така известен майстор на формулиране на въпроси, т.нар. Ферми-задачи, допускащи подобни оценки. Отличителните белези на тези задачи са два: първо, в техните условия обикновено липсват достатъчно данни за намиране на отговора и човек трябва да съобрази каква допълнителна информация трябва да привлече, както и евентуално да направи някои разумни предположения и, второ, търсят се не точни решения, а само оценки на порядъците на величините. Решаването на подобни задачи спомага много за развиване на способността да се правят количествени оценки, на физичната интуиция и на физичния начин на мислене.

По-долу поместваме подбор от Ферми-задачи, публикувани през 90-те години в сп. *The Physics Teacher* (някои – адаптирани за нашите условия).

1. Колко акордьори на пиана има в Ню Йорк?

Решение: Самият Ферми предлага следното решение: Ню Йорк има 10^7 жители. Приемайки, че средното семейство е петчленно, това прави $2 \cdot 10^6$ семейства. Ако допуснем, че едно на всеки 10 семейства притежава пиано, това означава, че в Ню Йорк има $2 \cdot 10^5$ пиана. Ако едно пиано трябва да се акордира средно по веднъж на 2 години, то всяка година трябва да бъдат акордирани 10^5 пиана. Като приемем, че един акордьор може да акордира 5 пиана за ден и годишно работи 200 дни, това означава, че за една година той се справя с 10^3 пиана и следователно на Ню Йорк са му достатъчни $10^5 : 10^3 = 100$ акордьори.

Този резултат всъщност означава, че броят на акордьорите в Ню Йорк едва ли е по-малък от 10 и едва ли – по-голям от 1000.

2. Колко литра вода изпиват хората в България за една година?

Решение: Ако приемем, че на ден човек изпива 1,5 л вода, за 365 дни 7-те милиона жители в България ще изпият $1,5 \cdot 365 \cdot 7 \cdot 10^6 \text{ л} \sim 10^8 \text{ л}$ вода.

3. Колко чаши вода са необходими за напълване на една стандартна вана за къпане?

Решение: Примерните размери на една вана са 1,5 m x 0,75 m x 0,5 m и следователно обемът ѝ е $\sim 0,5 \text{ m}^3 = 0,5 \cdot 10^6 \text{ cm}^3$. Обемът на водна чаша е 250 cm^3 . Отношението на тези две числа определя броя на чашите с вода, които пълнят ваната: $0,5 \cdot 10^6 : 250 \sim 10^3$, т.е. по порядък – хиляда чаши.

4. Колко време е необходимо, за да измине човек пеш разстояние, равно на разстоянието от Земята до Луната?

Решение: Разстоянието до Луната е 380 000 km. Ако върви по 8 часа на ден със средна скорост 5 km/h, човек ще изминава дневно 40 km. Следователно за изминаване на въпросното разстояние са необходими $380\,000 : 40 = 9500$ дни, т.е. по порядък 10^4 дни – над 25 години.

5. Колко е обемът на един мол алуминий? (Плътноста на алуминия е 2,7 g/cm³, а масовото му число – 27.)

Решение: Обемът на 1 mol алуминий е: $(27 \text{ g/mol}) : (2,7 \text{ g/cm}^3) = 10 \text{ cm}^3/\text{mol}$.

6. Колко пъти цената на електроенергията, запасена в една суха батерия, превишава цената на електроенергията, разпространявана по електрическата мрежа?

Решение: При напрежение 1,5 V една суха батерия може да осигури 5 A ток в продължение на един час. Отдадената от батерията за това време електроенергия е $(1,5 \text{ V}) \cdot (5 \text{ A}) \cdot (1 \text{ h}) = 7,5 \text{ Wh} = 7,5 \cdot 10^{-3} \text{ kWh}$. Ако батерията струва 50 ст. = 0,5 лв, цената на киловатчас електроенергия ще бъде (0,5 лв) : $(7,5 \cdot 10^{-3} \text{ kWh}) = 60 \text{ лв/kWh}$. Цената на електроенергията от електрическата мрежа е от порядъка на 0,2 лв/kWh, т.е. два порядъка по-евтина.

7. Колко ученици има в България?

Решение: Граждани на България са около $7 \cdot 10^6$. Ако приемем, че приблизително 1/5 от тях са ученици, това означава, че броят на учениците у нас е около 1 милион.

8. Колко е обемът на възрастен човек в cm^3 ?

Решение: Средната маса на възрастен човек е около 70 kg, а плътността на човешкото тяло – близка до плътността на водата – 10^3 kg/m^3 . Следователно обемът на човек е $70 : 10^3 = 0,07 \text{ m}^3$ или по порядък 10^5 cm^3 .

9. Колко е броят на звездите във Вселената?

Решение: Броят на звездите в нашата Галактика е 10^{11} , а броят на галактиките във Вселената – 10^{11} . Следователно по порядък броят на звездите във Вселената е 10^{22} – 10^{23} .

10. Колко вдишвания и издишвания би направил Юлий Цезар, ако беше жив и до днес?

Решение: Човек прави средна 25 вдишвания и издишвания в минута. Тъй като Цезар е живял преди приблизително 2000 години, ако беше жив до днес, щеше да е направил $(25 \text{ вдишв./мин.}) \cdot (60 \text{ мин./час}) \cdot (24 \text{ часа/денонощие}) \cdot (365 \text{ дни/год.}) \cdot (2000 \text{ год.})$, т.е. общо около 10^{10} вдишвания и издишвания.

11. Колко пощенски марки са необходими, за да се покрие с тях футболно игрище?

Решение: При размери 50 m x 100 m площта на едно футболно игрище е $5 \cdot 10^3 \text{ m}^2$. Примерната площ на една пощенска марка е $4 \text{ cm}^2 = 4 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$. Тогава търсеният брой марки е $(5 \cdot 10^3) : (4 \cdot 10^{-4}) \sim 10^7$ – десет милиона марки.

12. Оценете масата на главичката на топлийка.

Решение: При диаметър около 1 mm, обемът на главичката на топлийката е от порядъка на $1 \text{ mm}^3 = 10^{-3} \text{ cm}^3$. плътността на желязото е около 8 g/cm^3 , така че търсената маса е от порядък на 10^{-2} g .

13. Оценете в сантиметри дебелината на листа хартия, върху която е отпечатан учебникът по физика.

Решение: Със своите 250 страници учебникът по физика и астрономия за 9. (Просвета, 2001 г.) има дебелина 15 mm. Следователно дебелината на един лист е в интервала (0,1–0,01) mm.

14. *Колко секунди живот ви остава, ако допуснем, че доживеете до прилични старини?*

Решение: Да допуснем, че ви остава да живеете още 60 години. Това прави (60 год.).(365 дни/год.).(24 часа/ден).(3600 сек./час) $\sim 10^9$ секунди.

15. *Колко червени кръвни телца има във вашето тяло?*

Решение: Да приемем, че в човешкото тяло има 5 литра кръв, т.е. от порядъка на 10^{-3} m^3 . Размерите на червените кръвни телца са от порядъка на 10^{-5} m , т.е. обемът на едно кръвно телце е от порядъка на 10^{-15} m^3 . Ако половината от обема на кръвта е зает от червени кръвни телца, то общият им брой по порядък е 10^{12} . За сравнение – това е 10 пъти повече (един порядък) от броя на звездите в Галактиката.

16. *Всяка секунда от крана на чешимата се отделя капка. За колко секунди в тенджерата с диаметър 30 cm ще се събере слой вода с височина 5 cm?*

Решение: Обемът, който трябва да се изпълни с вода е $(\pi/4) \cdot (30)^2 \cdot (5) \approx 3500 \text{ cm}^3$. Ако приемем, че обемът на една капка е $1/5 \text{ cm}^3$, необходимият брой капки е $3500 \cdot 5 = 17\,500$. Тъй като скоростта на изтичане на водата е 1 капка/сек., такъв брой капки ще падне в тенджерата за около 5 часа.

Дълбочината на водата ще достигне 5 cm, при положение, че тя не се изпарява.

17. *Известна е историята с предполагаемо златната корона на царя на Сиракуза и Архимед. Ако приемем, че короната е била наистина златна и достатъчно удобна за носене, колко атома злато е имало в нея? (Атомната маса на златото е 197.)*

Решение: За да бъде удобна за носене, една корона не бива да тежи повече от килограм (ако е по-лека, ще бъде твърде тънка). Един мол злато (т.е. $6 \cdot 10^{23}$ атома) има маса 197 g. Следователно в короната има около 5 мола злато, т.е. около 10^{24} атома.

18. *Колко електрона навлизат в стартера на автомобил при запалване на двигателя?*

Решение: Типична стойност на тока през стартера е 60 A, а времето, през което тече този ток – 2 sec. Следователно общият заряд през стартера ще бъде около $2 \cdot 60 = 120 \text{ C}$. Тъй като зарядът на един електрон е $1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$, броят на електроните навлезли в стартера е от порядъка на $(120) : (1,6 \cdot 10^{-19}) \sim 10^{21}$.

(Разбира се, докато стартерът работи същият брой електрони го и напуска, но това не са същите електрони, които са навлезли в него!)

19. *Слънчевата константа, т.е. количеството електромагнитна енергия, която е излъчена от Слънцето и преминава на Земята през 1 m^2 площ, поставена перпендикулярно на пътя на лъчите, е $1,3 \text{ kW/m}^2$. Каква маса губи Слънцето за единица време вследствие на радиацията?*

Решение: Земята отстои от Слънцето на разстояние $150 \cdot 10^6 \text{ km} = 1,5 \cdot 10^{11} \text{ m}$. Енергията, която пресича за една секунда сфера с такъв радиус е $4\pi(1,5 \cdot 10^{11})^2 \cdot (1,3 \cdot 10^3) \text{ J}$. За да пресметнем каква маса губи Слънцето всяка секунда, излъчвайки толкова енергия, трябва, съгласно с формулата $E = mc^2$ да разделим полученото по-горе число с $c^2 = 9 \cdot 10^{16} \text{ m}^2/\text{s}^2$. Така получаваме число от порядъка на 10^9 или 10^{10} kg/s .

20. *Какво количество ледена вода трябва да изтиете, за да компенсирате онези 3000 kcal, които сте погълнали чрез храната по време на обяд?*

Решение: В условието на задачата се предполага, че за сметка на цялата запасена в храната химична енергия в организма се отделя $3 \cdot 10^6$ калории количество топлина и, за да не прегреем, това количество трябва да бъде погълнато от вода с начална температура 0°C , която след това достига нормалната температура на човешкото тяло – 37°C . Тъй като всеки cm^3 вода при повишаване на температурата си с 1°C поглъща 1 калория (това е предимството на калорията като единица за енергия), необходимото количество вода ще бъде $(3 \cdot 10^6) : [(1) \cdot (37)] \approx 10^5 \text{ cm}^3 = 100$ литра вода!

21. *Коя енергия е по-голяма: енергията, съдържаща се в храната, която човек приема през целия си живот, или енергията, необходима за изпращане на човека в околоземна орбита?*

Указание: За да оцените енергията, съдържаща се в храната ще трябва да предположите някаква средна продължителност на човешкия живот, да вземете данни за калоричността на средния дневен порцион и да използвате връзката между калория и джаул. В опростения вариант на решението може да отчетете само кинетичната енергия, необходима за придаване на първа космическа скорост на човек със средна маса. Ако тя се окаже по-голяма от енергията в храната, може да спрете дотук. Ако се окаже по-малка, може да направите втора стъпка, като отчетете и необходимата енергия, за издигане на човека на 100 – 200 km над земната повърхност (т.е. – увеличението на неговата гравитационна потенциална енергия).

И няколко задачи без решения.

След удар, звукът на камертона се чува в продължение на 20 s. Колко трептения извършват за това време клонките на камертона?

Да предположим, че пет акробати, качвайки се един върху друг на раменете, построят пирамида. Ако вие слагате един върху друг листове за писане, колко листа трябва да използвате, за да натрупате кула, висока колкото човешката пирамида?

Ако пет души се потопят едновременно в цилиндрична цистерна с вода 3 m дълбока и 2 m в диаметър, с колко сантиметра ще се повиши равнището на водата? (На пръв поглед дълбочината на водата е излишна като данна. Защо все пак е указана?)