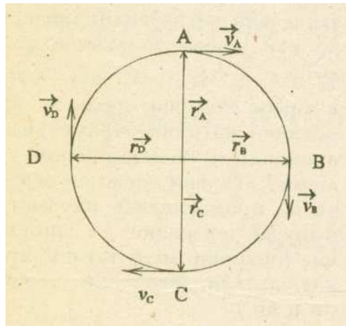
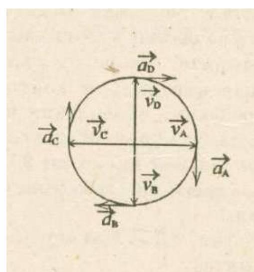
$a_n = R\omega^2$ – просто и ясно

По броя на наличните в литературата предложения за “елементарен” извод на формулата за центростремителното ускорение вероятно може да си съперничи само с многобройните изводи на формулата за кулоновия потенциал (φ ~ q/r). Предлагаме на учителите поредния извод[1].



Фиг. 1.

На фиг. 1 са показани четири последователни положения (в т. A, B, C и D) на материална точка M, която се движи равномерно по окръжност с радиус R. Ако периодът на движението е T, очевидно е, че големината на скоростта е $v = \dfrac{2\pi R}{T} = R\omega$ (тъй като пътят, изминат за време T е $2\pi R$, а $2\pi/R = \omega$ е ъгловата скорост на движението).


Фиг. 2.

Да си представим сега, че от една точка (фиг. 2) нанасяме положенията на вектора на скоростта v на материалната точка в различни моменти от времето. По големина този вектор е постоянен (движението е равномерно!), следователно неговият край ще описва със същата ъглова скорост окръжност, чиито радиус е v. На фиг. 2 са изобразени положенията на този вектор в моментите, когато материалната точка е съответно в т. . A, B, C и D.

И така, по характер движението на края на вектора на скоростта v е аналогично на движението на самата материална точка. Но аналогични са и дефинициите за скорост и ускорение –скоростта е изменение на радиус-вектора за единица време ($v = \dfrac{\Delta r}{\Delta t}$), а ускорението е изменение на скоростта за единица време ($a = \dfrac{\Delta v}{\Delta t}$). Следователно, щом големината на скоростта е $\dfrac{2\pi R}{T}$, големината на ускорението пък ще бъде $a = \dfrac{2\pi v}{T} = v\omega$. Като заместим тук $v = R\omega$, получаваме познатия израз $a = R\omega^2$.

А как стои въпросът за посоката на ускорението? От фиг. 1 се вижда, че във всеки момент скоростта е перпендикулярна на радиус-вектора на движещата се точка,

[1] От Am. J. Phys., 1994, окт.

т.е. посоката на скоростта се получава от посоката на радиус-вектора чрез завъртане на 90º по посока на движението на часовниковите стрелки. Следвайки вече използваната аналогия, заключаваме, че посоката на ускорението ще се получи от посоката на скоростта чрез още едно такова завъртане. Но две еднопосочни въртения на 90º са еквивалентни на едно завъртане на 180º. Следователно посоката на ускорението е противоположна на посоката на радиус-вектора, т.е. – то е насочено към центъра на окръжността, по която става движението.

Наистина просто и ясно – поне за този, който е свикнал да работи с вектори.