Лекция 5

Четириполюсници

Съдържание на Лекция 5

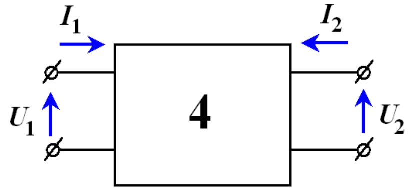
- **Четириполюсници**
  - 5.1 Идея за описание на схемите като многополюсници. Вторични параметри. Системи от първични параметри на четириполюсници.
  - 5.2 Връзка между първични и вторични параметри. Двугенераторни еквивалентни схеми на четириполюсници. Свързване на четириполюсници. Примери.

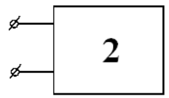
Лекция 5

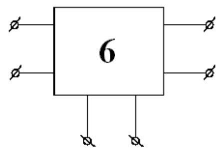
5.1 Идея за описание на схемите като много-полюсници. Вторични параметри. Система от първични параметри на четириполюсници.

Многополюсници

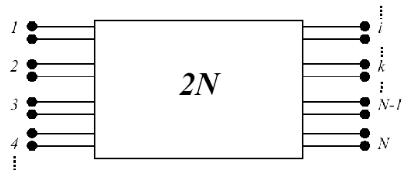
Не винаги една електрическа верига е необходимо да има известна структура. В някои случаи схемата може да се представи като "черна кутия" (black box) с N входни клеми. Всяка такава клема (рамо, вход/изход) има по два полюса. Така схемите могат да се представят като дву-полюсници ($N = 1{\times}2$), четири-полюсници ($N = 2{\times}2$), шест-полюсници ($N = 3{\times}2$) и т.н. – в общия случай много-полюсници ($N = N{\times}2$). Всяко рамо се характеризира с напрежение U_i и ток I_i. Този подход може да се използва както за постоянно-токови вериги (с реални токове и напрежения), така и в променливо-токови вериги (с комплексни токове и напрежения).





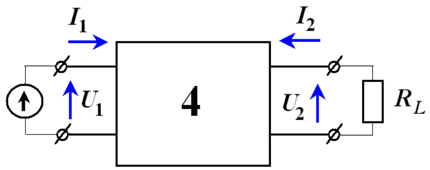


Означения:
U_1 – входно напрежение;
I_1 – входен ток;
U_2 – изходно напрежение;
I_2 – изходен ток



Първични и вторични параметри на многополюсниците

Многополюсниците се характеризират с първични и вторични параметри. По-долу е представен пример за тези параметри в случая за четири-полюсник (вж и следващата страница)



Първични параметри:

Може да се покаже, че между параметрите на входа и изхода на четири-полюсника U_1, I_1, U_2 и I_2 – съществува функционална зависимост, поради която всяка двойка параметри може да се изрази чрез другата двойка. Това става чрез 6 вида матрици (вж. по-нататък)

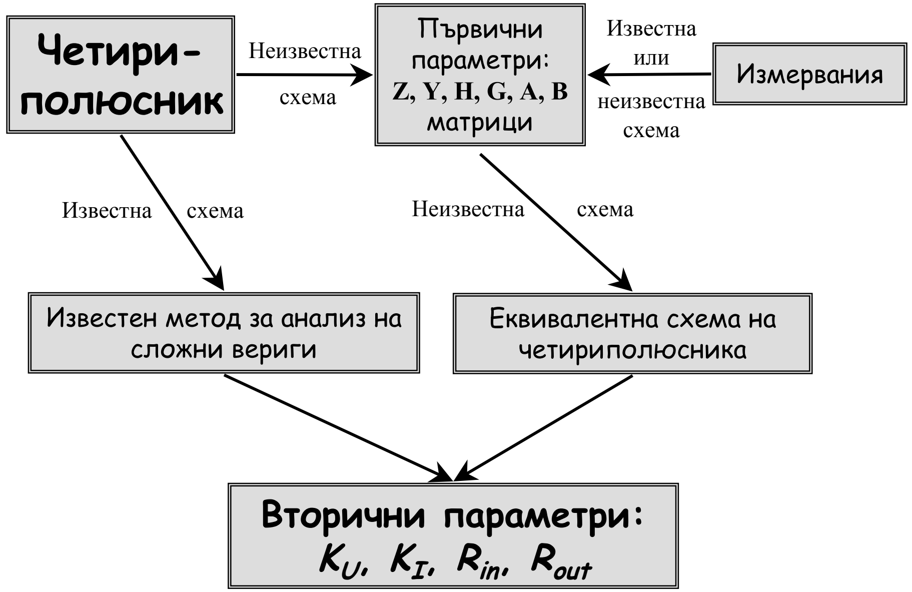
$$F(U_1, U_2, I_1, I_2) = 0$$

Вторични параметри:

Това са важните параметри на четири-полюсника, чрез които той се описва при свързването му с други електрически вериги. Това са: K_U – коефициент на предаване по напрежение; K_I – коефициент на предаване по ток; R_{in} – входно съпротивление; R_{out} – изходно съпротивление (вж. дефинициите по формулите по-долу:

$$K_U = U_2 / U_1 \qquad K_I = I_2 / I_1 \qquad R_{in} = U_1 / I_1 \qquad R_{out} = U_2 |_{open} / I_2 |_{short}$$

Връзка между първични и вторични параметри



Матрично описание на много-полюсниците

$$F(U_1, U_2, I_1, I_2) = 0$$

Наличието на функционална зависимост между параметрите U_1, I_1, U_2 и I_2 на входа и изхода на четири-полюсника означава, че всяка една двойка от тези параметри зависи от другата двойка и връзката между тях се дава с 6 вида матрици. Можем да формираме следните двойки вектор-стълбове от известни параметри – токове и напрежения, и да въведем 6 матрици, които свързват тези двойки:

$$\begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} = \hat{Z} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix}; \qquad \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \hat{Y} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} \qquad \hat{Z} = \frac{1}{\hat{Y}} \qquad \hat{Y} = \frac{1}{\hat{Z}}$$

$$\begin{pmatrix} U_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \hat{H} \begin{pmatrix} I_1 \\ U_2 \end{pmatrix}; \qquad \begin{pmatrix} I_1 \\ U_2 \end{pmatrix} = \hat{G} \begin{pmatrix} U_1 \\ I_2 \end{pmatrix} \qquad \hat{H} = \frac{1}{\hat{G}} \qquad \hat{G} = \frac{1}{\hat{H}}$$

$$\begin{pmatrix} U_1 \\ I_1 \end{pmatrix} = \hat{A} \begin{pmatrix} U_2 \\ I_2 \end{pmatrix}; \qquad \begin{pmatrix} U_2 \\ I_2 \end{pmatrix} = \hat{B} \begin{pmatrix} U_1 \\ I_1 \end{pmatrix} \qquad \hat{A} = \frac{1}{\hat{B}} \qquad \hat{B} = \frac{1}{\hat{A}}$$

Z-матрици

Z–матрица (матрица на импеданса). Нека за да известни двойката токове (I_1, I_2). Тогава неизвестни са двойката напрежения (U_1, U_2). Връзката се дава със Z-матрицата:

$$\begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} = \hat{Z} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} \qquad Z = \begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \left| \begin{array}{l} U_1 = Z_{11} I_1 + Z_{12} I_2 \\ U_2 = Z_{21} I_1 + Z_{22} I_2 \end{array} \right.$$

Физичен смисъл на Z-параметрите (измерение на съпротивление)

$$Z_{11} = \left. \frac{U_1}{I_1} \right|_{I_2 = 0}$$ При режим на "празен" ход" (open) на изходната верига

$$Z_{21} = \left. \frac{U_2}{I_1} \right|_{I_2 = 0}$$ При режим на "празен" ход" (open) на изходната верига

$$Z_{12} = \left. \frac{U_1}{I_2} \right|_{I_1 = 0}$$ При режим на "празен" ход" (open) на входната верига

$$Z_{22} = \left. \frac{U_2}{I_2} \right|_{I_1 = 0}$$ При режим на "празен" ход" (open) на входната верига

Y-матрици

Y-матрица (матрица на адмитанса/проводимостта). Нека за да известни двойката напрежения (U_1, U_2). Тогава неизвестни са двойката токове (I_1, I_2). Връзката се дава с Y-матрицата:

$$\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \hat{Y} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} \qquad \hat{Y} = \begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{\hat{Z}}$$

$$\begin{vmatrix} I_1 = Y_{11}U_1 + Y_{12}U_2 \\ I_2 = Y_{21}U_1 + Y_{22}U_2 \end{vmatrix}$$

Физичен смисъл на Y-параметрите (измерение на проводимост)

$$Y_{11} = \left.\frac{I_1}{U_1}\right|_{U_2=0}$$ При режим на "късо съединение" (short) на изходната верига

$$Y_{21} = \left.\frac{I_2}{U_1}\right|_{U_2=0}$$ При режим на "късо съединение" (short) на изходната верига

$$Y_{12} = \left.\frac{I_1}{U_2}\right|_{U_1=0}$$ При режим на "късо съединение" (short) на входната верига

$$Y_{22} = \left.\frac{I_2}{U_2}\right|_{U_1=0}$$ При режим на "късо съединение" (short) на входната верига

H-матрици

H-матрица (матрица на смесени параметри). Използва се често при характеризиране на транзистори.

$$\begin{pmatrix} U_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \hat{H} \begin{pmatrix} I_1 \\ U_2 \end{pmatrix} \qquad \hat{H} = \begin{pmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} U_1 = H_{11}I_1 + H_{12}U_2 \\ I_2 = H_{21}I_1 + H_{22}U_2 \end{vmatrix}$$

Физичен смисъл на H-параметрите (измерение на импеданс, проводимост и коефициенти на предаване по напрежение и ток)

$$H_{11} = \left.\frac{U_1}{I_1}\right|_{U_2=0}$$ При режим на "късо съединение" (short) на изходната верига

$$H_{21} = \left.\frac{I_2}{I_1}\right|_{U_2=0}$$ При режим на "късо съединение" (short) на изходната верига

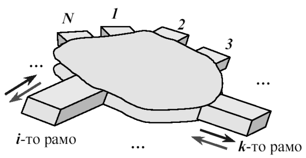
$$H_{12} = \left.\frac{U_2}{U_1}\right|_{I_1=0}$$ При режим на "празен ход" (open) на входната верига

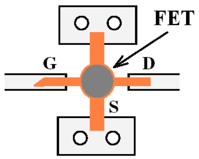
$$H_{22} = \left.\frac{U_2}{I_2}\right|_{I_1=0}$$ При режим на "празен ход" (open) на входната верига

S-матрици – на високи честоти

На високи честоти дефинирането на напрежение и ток е условно. Затова тук се използват друг тип матрици – комплексни S-матрици. Тук вместо вектор-стълбове на токовете и напреженията се използват вектор-стълбове на комплексните амплитуди (модул и фаза) на падащите и отразените вълни.

$$\begin{pmatrix} \dot{b}_1 \\ \dot{b}_2 \end{pmatrix} = \hat{S} \begin{pmatrix} \dot{a}_1 \\ \dot{a}_2 \end{pmatrix}$$





$$\dot{S} = \begin{pmatrix} |S_{11}|e^{j\varphi_{11}} & |S_{12}|e^{j\varphi_{12}} \\ |S_{21}|e^{j\varphi_{21}} & |S_{22}|e^{j\varphi_{22}} \end{pmatrix}$$

S-матрицата се използва при характеризиране на много-раменни микровълнови устройства. Напр. в каталозите на FET транзисторите се дават параметрите S_{11}, S_{21}, S_{12} и S_{22} при свързване "общ соурс".

Физичен смисъл на модулите на S-параметрите:

$$|S_{11}| = \frac{b_1}{a_1} = \rho_1$$ Коефициент на отражение на вълната от 1-то рамо

$$|S_{12}| = \frac{b_1}{a_2} = \tau_{12}$$ Коефициент на преминаване на вълната от 2-то към 1-то рамо

$$|S_{21}| = \frac{b_2}{a_1} = \tau_{21}$$ Коефициент на преминаване на вълната от 1-то към 2-то рамо

$$|S_{22}| = \frac{b_2}{a_2} = \rho_2$$ Коефициент на отражение на вълната от 2-то рамо

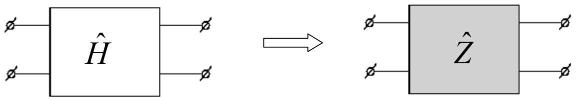
Лекция 5

5.2 Връзка между първичните и вторичните параметри. Дву-генераторни еквивалентни схеми на четириполюсници. Свързване на четири-полюсници. Примери.

Връзки между матриците Z, Y, H, G, A и B. Пример

Функционална зависимост между параметрите U_1, I_1, U_2 и I_2 на входа и изхода на четири-полюсника означава още, че между елементите на всички матрици, използвани за описание на четири-полюсниците, съществуват връзки. Тук ще дадем следният пример. Нека един четириполюсник има известни H-параметри. Да се определят неговите Z-параметри

Пример:



Решение:

$$\begin{pmatrix}U_1\\I_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}H_{11}&H_{12}\\H_{21}&H_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I_1\\U_2\end{pmatrix}\qquad\begin{pmatrix}U_1\\U_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}Z_{11}&Z_{12}\\Z_{21}&Z_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I_1\\I_2\end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}U_1&=H_{11}I_1+H_{12}U_2\\I_2&=H_{21}I_1+H_{22}U_2\end{aligned}\qquad\begin{aligned}U_1&=Z_{11}I_1+Z_{12}I_2\\U_2&=Z_{21}I_1+Z_{22}I_2\end{aligned}$$

Сега от първата колона трябва да се изразят величините $U_{1,2}$ и да се заместят във втората:

$$U_2=\frac{1}{H_{22}}I_2-\frac{H_{21}}{H_{22}}I_1\qquad U_1=H_{11}I_1+H_{21}\left(\frac{1}{H_{22}}I_2-\frac{H_{21}}{H_{22}}I_1\right)$$

Пример: преход H ⇒ Z

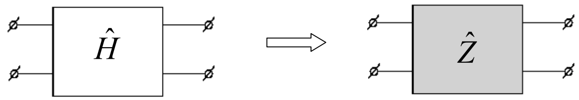
Продължаваме примера и изразяваме $U_{1,2}$:

$$U_2=-\frac{H_{21}}{H_{22}}I_1+\frac{1}{H_{22}}I_2\qquad U_1=\left(H_{11}-\frac{H_{21}}{H_{22}}\right)I_1+\frac{H_{21}}{H_{22}}I_2$$

Окончателно:

$$Z_{11}=H_{11}-\frac{H_{21}}{H_{22}}\qquad Z_{21}=-\frac{H_{21}}{H_{22}}$$

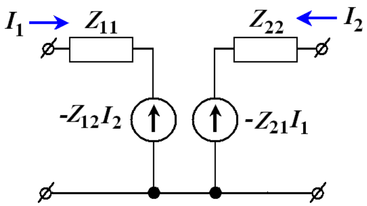
$$Z_{12}=\frac{H_{21}}{H_{22}}\qquad Z_{22}=\frac{1}{H_{22}}$$



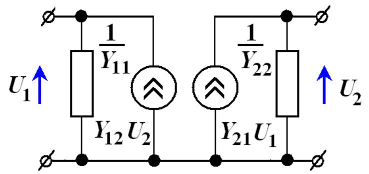
По показания начин могат да се определят връзките между матричните елементи на всички матрици, използвани за описание на четири-полюсника. Макар и по-трудно, подобна връзка може да се утановен и с елементите на S-матрицата.

Еквивалентни схеми на четири-полюсниците

Понеже схемата на четириполюсника не е задължително да бъде известна (“черна кутия”), тя може да бъде представена с помощта на еквивалентна дву-генераторна схема (с генератори на напрежение и ток, заедно с техните вътрешни съпротивления) в зависимост от типа на матрицата. С помощта на своята еквивалентна схема всеки четириполюсник може да бъде представян в по-обща схема, където се налага да се работи с конкретни параметри.



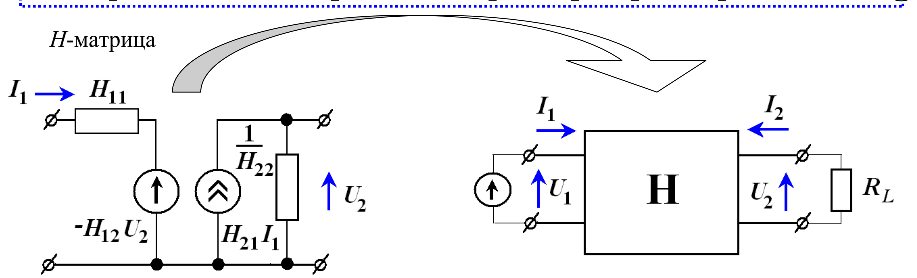
Z-матрица



Y-матрица

На фигурите са дадени еквивалентните схеми на четири-полюсници, описвани с двете най-известни типа матрици Z и Y. Генераторите имат еквивалентни напрежения (или токове) и вътрешни съпротивления, свързани с елементите на дадената матрица. Генераторът във входната верига изразява влиянието върху нея на параметрите на изходната верига и обратно (вж. за пример стойностите на на еквивалентните токове и напрежения на генераторите: $-Z_{12}I_2$ или $Y_{12}U_2$ във входните вериги или $-Z_{21}I_1$ или $Y_{21}U_1$ в изходните вериги на четириполюсници, описвани със Z и Y матрици, съответно. Еквивалентните съпротивления (проводимости) на входа и изхода, обаче, са свързани само със съответните входни или изходни елементи на матриците.

Изразяване на вторичните параметри чрез първичните



Имайки еквивалентна схема на даден четириполюсник, можем лесно да намерим неговите вторични параметри. Даден е пример за четириполюсник, описван с H-матрицата си. Той се захранва на входа с източник U_1 (пренебрегва се неговото вътрешно съпротивление R_i), а изходът е натоварен с товарно съпротивление R_L (долу са дадени крайните формули).

$$K_I=\frac{H_{21}}{1+R_LH_{22}}\qquad R_{in}=H_{11}+R_L\frac{H_{12}H_{21}}{1+R_LH_{22}}$$

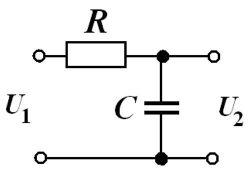
$$K_U=\frac{H_{21}}{\frac{H_{11}}{R_L}+(H_{11}H_{22}+H_{12}H_{21})}\qquad R_{out}=\frac{H_{11}}{H_{11}H_{22}+H_{12}H_{21}}$$

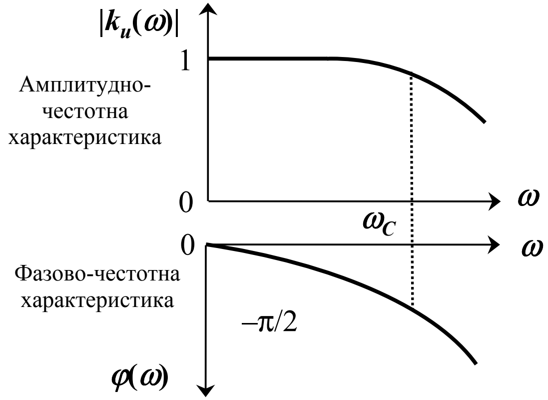
Променливотокови четириполюсници

Матричният подход към описание на постояннотоковите четириполюсници се запазва и при променливотоковите. Основната разлика е, че сега елементите на матриците са комплексни (амплитуда и фаза). При променливотоковите четириполюсници много често се налага да се определят комплексните коефициенти на предаване по ток и напрежение (напр. при филтрите)

$$\dot{K}_I; \quad \dot{K}_U \qquad \dot{K}_U(f) = \left|\dot{K}_U(f)\right| e^{j\varphi(f)}$$

Пример:

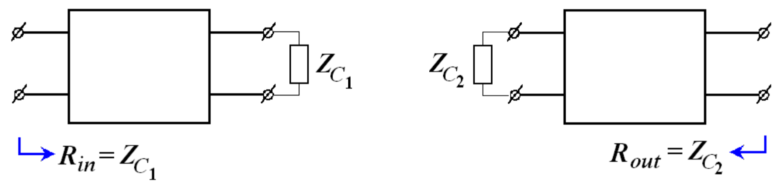




Характеристичен импеданс

Характеристичният импеданс е важно понятие в теорията на много-полюсниците (напр. при филтрите), както и в теорията на предавателните линии (вж. Лекция 9).

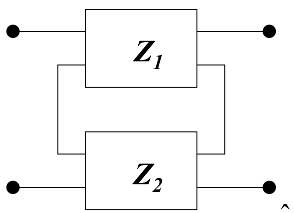
По дефиниция характеристичен импеданс Z_C (или R_C) на четири-полюсник е равен на този товарен импеданс R_L на изхода (или входа), за който входният R_{in} (или изходният R_{out}) импеданс е равен на товарния R_L (вж. фигурите долу)



Какъв е физичният смисъл на характеристичния импеданс? Този импеданс е естествен за веригата, представена с четири-полюсника. Когато с подобен импеданс се натовари изхода (и входа) на веригата, всъщност нищо не се променя при разпространението на сигнал в тази верига и тя се оказва напълно “съгласувана” с другите вериги. В резултат на това не се наблюдава отразен (“върнат”) сигнал и коефициентът на предаване на четириполюсни-а е максимален. Така се съгласуват свързаните четириполюсници (напр. Многозвенните филтри) и предавателните линии на високи честоти.

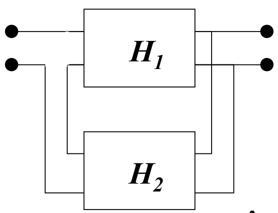
Свързване на четириполюсници

❖ Последователно (чрез Z-матриците)



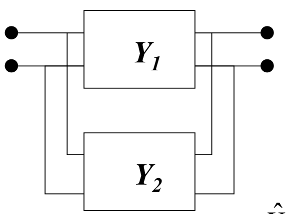
$$\hat{Z}_\Sigma = \hat{Z}_1 + \hat{Z}_2$$

❖ Последователно-паралелно (чрез H-матриците)



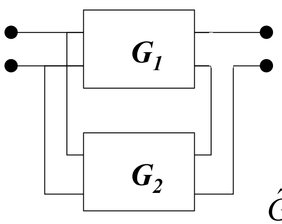
$$\hat{H}_\Sigma = \hat{H}_1 + \hat{H}_2$$

❖ Паралелно (чрез Y-матриците)



$$\hat{Y}_\Sigma = \hat{Y}_1 + \hat{Y}_2$$

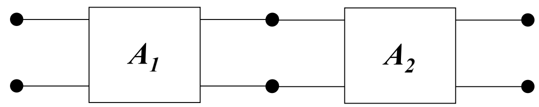
❖ Паралелно-последователно (чрез G-матриците)



$$\hat{G}_\Sigma = \hat{G}_1 + \hat{G}_2$$

Каскадно свързване на четириполюсници

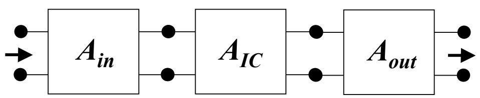
❖ Каскадно свързване на четириполюсници (един след друг). Това е един от най-използваните методи за свързване и се описва чрез А- или В-матриците, в зависимост от посоката, в която се изследват устройствата. Използват се при описание на много-звенните филтри, много-стъпалните усилватели и пр устройства, които се свързват едно след друго.



$$\hat{A}_\Sigma = \hat{A}_1\,\hat{A}_2 \quad \Rightarrow \qquad \text{или} \qquad \hat{B}_\Sigma = \hat{B}_1\,\hat{B}_2 \quad \Leftarrow$$

Пример: Екстракция на параметри на интегрални схеми (IC)

Има устройства, напр интегралните схеми, които не могат да бъдат измерени директно (не може да се достигне физически до структурите вътре в тях). Тогава може да се използва техниката на каскадно-свързаните устройства, показана с представените формули (означения: A_{IC} – матрица на IC; A_{in}, A_{out} – матрици на входно-изходните помощни вериги; A_{meas} – измерена матрица на цялата верига



$$\hat{A}_{meas} = \hat{A}_{in}\,\hat{A}_{IC}\,\hat{A}_{out}$$

$$\hat{A}_{in}^{-1}\,\hat{A}_{meas}\,\hat{A}_{out}^{-1} = \hat{A}_{in}^{-1}\,\hat{A}_{in}\,\hat{A}_{IC}\,\hat{A}_{out}\,\hat{A}_{out}^{-1}$$

$$\Rightarrow \quad \hat{A}_{IC} = \hat{A}_{in}^{-1}\,\hat{A}_{meas}\,\hat{A}_{out}^{-1}$$