

Лекция 7

Трептящи кръгове

Съдържание на Лекция 7

▲ Трептящи кръгове

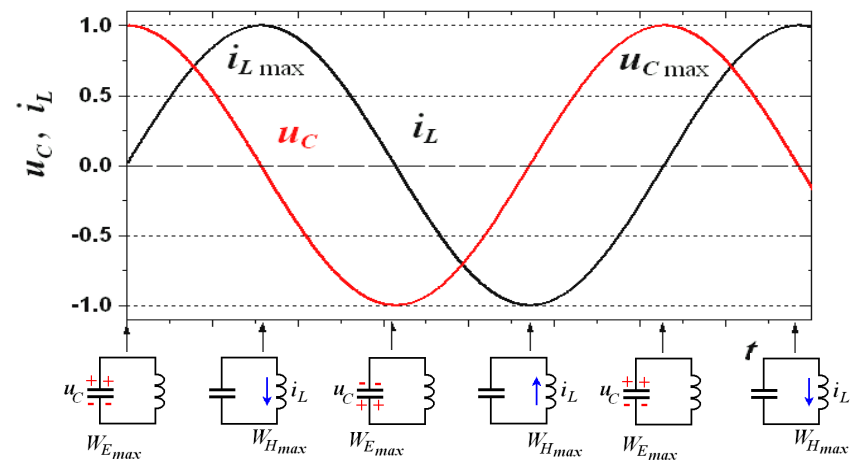
- 7.1 Свободни и принудени трептения в трептящ кръг.
- 7.2 Схема, свойства, резонансни криви и параметри на последователен и паралелен трептящ кръг.
- 7.3 Качествен (Q-) фактор на трептящи кръгове. Натоварен Q-фактор. Коефициент на връзката.
- 7.4 Свързани трептящи кръгове.
- 7.5 Трансформатори.

Лекция 7

7.1 Свободни и принудени трептения в трептящ кръг

Трептящи кръгове

Някои от сложните RLC вериги могат да имат резонансни свойства - това са т.нар. *трептящи кръгове*. Основното им свойство е способността да запасяват енергия във включените в тях L и C елементи. Процесът е илюстриран на графиката долу, когато в системата няма загуби. В кондензатора се запасява цялата електрическа W_E , в bobината - цялата магнитна енергия W_H . Способността да се запасява енергия е свързана с процеса на периодично преминаване на електрическа в магнитна енергия и обратно.



Енергетичен баланс в трептящ LC кръг

Ще разгледаме енергетичния баланс в трептенията в трептящ кръг, включващ само два LC елемента и загубите на енергия не се отчитат. В кондензатора се запасява цялата електрическа енергия W_E в бобината - цялата магнитна енергия W_H и те са равни:

$$C \quad L \quad W_E = W_C = \frac{1}{2} C U_{C\max}^2 \quad W_H = W_L = \frac{1}{2} L I_{L\max}^2$$

$$W_E = W_H \Rightarrow \frac{1}{2} C U_{C\max}^2 = \frac{1}{2} L I_{L\max}^2$$

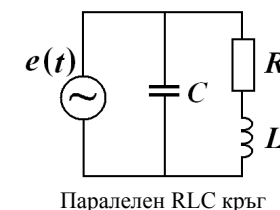
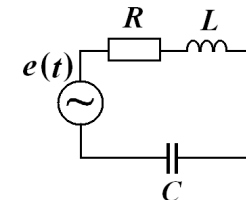
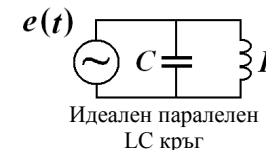
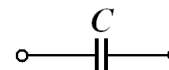
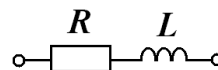
От равенството горе можем да определим т.нар. характеристичен импеданс ρ на трептящия кръг. От условието за равенството на падовете на напрежение в кръга можем да изведем просто и класическия израз за резонансната кръгова честота ω_0 на трептенията в идеалния LC кръг.

$$\Rightarrow \frac{U_{C\max}}{I_{L\max}} = \sqrt{\frac{L}{C}} = \rho$$

$$I_{C\max} \omega_0 L = U_{C\max} \Rightarrow \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Схеми на трептящи кръгове с RLC елементи

Дотук разгледахме трептящ кръг само с идеални LC елементи. В подобна схема няма механизъм за загуба на енергия. В реалните кръгове, както кондензаторът, така и най-често бобината, имат паразитно съпротивление и то присъства в схемата. Освен това, в кръга може съвсем съзнателно може да се включи съпротивление R . Подобен кръг е реален - в него има канал за загуби на енергия, и описаният прост механизъм на запасяване на енергия в трептящия кръг вече не е валиден.



Между трите елемента RLC има различни комбинации за включване, но практически се реализират основно две от тях. Причината е, че съпротивлението R обикновено се включва последователно към индуктивността L , най-често като паразитен елемент, а капацитетът се появява като самостоятелна величина.

В такъв случай има две възможни схеми:

- ❖ Последователен трептящ кръг (разгледан в 7.1 и 7.2)
- ❖ Паралелен трептящ кръг (разгледан в 7.2)

Последователен трептящ кръг

Нека за разгледаме трептенията в последователен RLC кръг в общия случай. Задачата може да се реши директно по операторен метод, но ние тук ще опишем класическото решение на диференциалното уравнение на Кирхоф при включен външен източник $e(t)$.

$$L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t) + \frac{1}{C} \int i(t) dt = e(t) \quad (1)$$

Със замяна (q е зарядът върху кондензатора); и с означения

$$q(t) = \int i(t) dt \quad \omega_0^2 = \frac{1}{LC}; \quad \delta = \frac{R}{2L}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2 q(t)}{dt^2} + 2\delta \frac{dq(t)}{dt} + \omega_0^2 q(t) = \frac{1}{L} e(t) \quad (1')$$

Това е диференциално уравнение от 2 ред за заряда q при начални условия:

$$q(t) = 0; \quad i(t) = \frac{dq(t)}{dt} = 0 \quad (t \leq 0)$$

Нека да използваме източника, за да "заредим" кондензатора. Това може да стане със скок на напрежението $e(t) = U_0$ при $t \geq 0$. Така можем да получим най-простото частно решение на нехомогенното диференциално уравнение (1), отговарящо на натрупване на статичен заряд q_0 върху плочите на кондензатора (общото решение е дадено по-нататък).

$$q_0 = \frac{U_0}{\omega_0^2 L}$$

Свободни трептения в реален последователен трептящ кръг

Сега нека разгледаме свободните трептения в последователен RLC кръг при изключен външен източник. Тази верига се описва с хомогенното диференциално уравнение (1) при $e(t) = 0$. Общото решение се търси във вида

$$q(t) = Q e^{\lambda t} \quad \text{и се получава характеристичното уравнение} \quad \lambda^2 + 2\delta\lambda + \omega_0^2 = 0$$

В зависимост от съотношението на величините δ и ω_0 са възможни следните 3 случая.

1. Апериодичен режим ($\delta > \omega_0$) (вж. графиките по-нататък). Решението е комбинация от две отрицателни експоненциални функции на времето $Q_{1,2} \cdot \exp(\lambda_{1,2} t)$ с декременти

$$\lambda_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$$

2. Свободни трептения ($\delta < \omega_0$). Тук решенията са две комплексно спрегнати величини

$$\lambda_{1,2} = -\delta \pm j\omega; \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$$

Общото решение за $q(t)$ е осцилираща функция с експоненциално затихваща амплитуда

$$q(t) = Q_1 e^{(-\delta + j\omega)t} + Q_2 e^{(-\delta - j\omega)t} = a e^{-\delta t} \cos(\omega t + \varphi)$$

Така се вижда физическият смисъл на величината δ като коефициент на затихване, а ω е честотата на собствените трептения, която се различава от честотата ω_0 . Едва при $\delta \ll \omega_0$ (т.е. при малка стойност на резистора R във веригата) за честота на собствените трептения може да се приеме величината ω_0 , която е известна като собствена честота на трептящия кръг.

Критичен режим. Преходен режим



3. **Критичен режим** ($\delta \sim \omega_0$) (вж. и следващата страница). В този особен случай времевата зависимост на заряда е

$$q(t) = Qte^{-\delta t}$$

Критичният режим се използва в някои измерителни прибори за бързо установяване на измереното показание на ток или напрежение

4. **Преходен режим** (при скок на напрежението $e(t) = U_0$ при $t \geq 0$). Това е задача за отклика на RLC кръга при единичен скок на напрежението и общото решение при $\delta < \omega_0$ се дава с

$$q(t) = q_0 + ae^{-\delta t} \cos(\omega t + \varphi); \quad q_0 = \frac{U_0}{\omega_0^2 L}$$

За да се определят константите a и φ , трябва да се отчетат началните условия за заряда и тока. Така се получават изразите

$$\frac{U_0}{\omega_0 L} + a \cos \varphi = 0; \quad -\delta \cos \varphi - \omega \sin \varphi = 0$$

Така се получават следните константи, които трябва да се заместят в израза за $q(t)$.

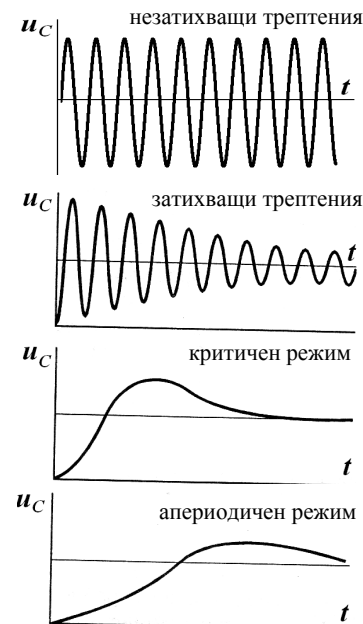
$$a = U_0 \frac{\sqrt{1 + \frac{\delta^2}{\omega^2}}}{\omega_0^2 L}; \quad \varphi = -\arctan \frac{\delta}{\omega}; \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$$

Видове трептения в реален трептящ кръг

Ще направим обобщение на трептения на тока и напрежението, които се наблюдават в трептящите кръгове. Ще разгледаме 2 случая:

❖ В единият режим – при включване във веригата на източник на променливотоков сигнал, се наблюдават т. нар. **принудени трептения**. Ако следим времевата зависимост на напрежението u_C върху кондензатора, регистрираме незатихващи по амплитуда трептения, ако честотата на генератора съвпада с честотата на собствените трептения в кръга, $\omega \sim \omega_0$.

❖ Във втория режим схемата “се зарежда” с енергия еднократно (чрез натрупване на заряд в кондензатора или чрез индуциране на ток във бобината). След този момент се наблюдават **свободни трептения**. Ако означим $\delta = R/2L$ (вж. предходните страници) можем да наблюдаваме три типа свободни трептения: 1) свободни затихващи трептения ($\delta < \omega_0$ или $\delta \ll \omega_0$) (напр. разряд на кондензатор през бобина с крайно съпротивление; 2) аperiодичен режим ($\delta > \omega_0$), липса на трептения, затихването на сигнала се осъществява само по експоненциални закони; 3) критичен режим ($\delta \sim \omega_0$), междинен режим между аperiодичен и периодичен разряд на кондензатор.



Лекция 7

7.2 Схема, свойства, резонансни криви и параметри на последователен и паралелен трептящ кръг

Импеданс на последователен трептящ кръг

Нека да разгледаме последователен RLC кръг в общия случай с включен източник на хармоничен променливотоков сигнал. Ще използваме комплексния метод за анализ.

$$E(t) = U_0 e^{-j\omega t} \Rightarrow E(t) = Z(\omega) I(t)$$

Комплексният импеданс на разглежданата RLC верига е:

$$Z = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = R + jX = |Z|e^{j\varphi}$$

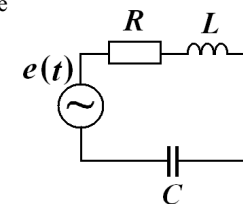
Определяме неговият модул и фаза

$$|Z| = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}; \quad \varphi = \arctan \frac{\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}{R}$$

Условия за резонанс

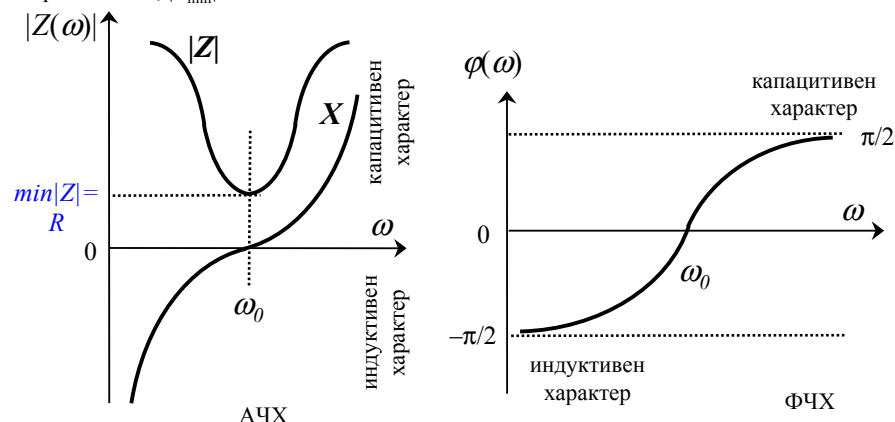
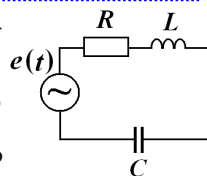
$$\omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C} \Rightarrow \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}; \quad \varphi = 0, 2\pi, 4\pi, \dots$$

На следващата страница са разгледани честотните зависимости (АЧХ и ФЧХ) на импеданса в последователен трептящ кръг.



АЧХ и ФЧХ на импеданса на последователен трептящ кръг

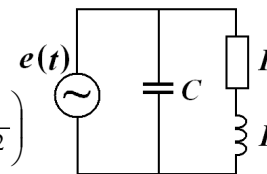
Показани за АЧХ и ФЧХ на импеданса на последователния RLC кръг. Ясно се вижда, че $|Z|$ има минимум на честотата на резонанс $\omega \sim \omega_0$, $|Z_{\min}| \rightarrow R$. При малки честоти $\omega < \omega_0$ импедансът има индуктивен характер ($X < 0$), а при големи честоти $\omega > \omega_0$ – капацитивен характер ($X > 0$). Това се потвърждава и от ФЧХ, $-\pi/2 < \varphi < 0$ при $\omega < \omega_0$, а $0 < \varphi < \pi/2$ при $\omega > \omega_0$. При $R = 0$ последователният RLC кръг има нулево съпротивление, $|Z_{\min}| \rightarrow 0$.



Импеданс на паралелен трептящ кръг

Сега още разгледаме паралелния трептящ RLC кръг. Използвайки комплексния метод можем да запишем комплексния адмитанс на схемата.

$$Y = j\omega C + \frac{1}{R + j\omega L} = \frac{R}{R^2 + \omega^2 L^2} + j\left(\omega C - \frac{\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2}\right)$$



Обикновено е валидно следното приближение, $R^2 \ll \omega^2 L^2$, което ще използваме, за да опростим изразите за $Y = Z^{-1}$.

$$Y \cong \frac{R}{\omega^2 L^2} + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right) = G + jB = |Y|e^{j\psi}$$

Определяме модула и фазата на Y

$$|Y| = \sqrt{\left(\frac{R}{\omega^2 L^2}\right)^2 + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2}; \quad \psi = \arctan \frac{\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)}{R / \omega^2 L^2}$$

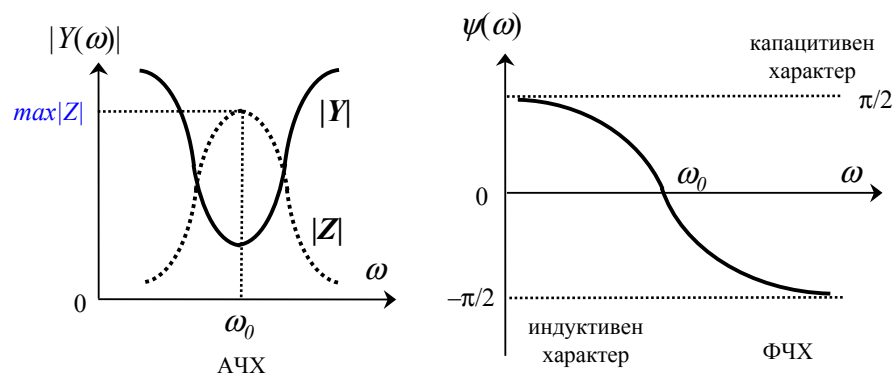
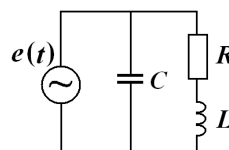
Условия за резонанс са същите, както при последователния кръг

$$\omega_0 C = \frac{1}{\omega_0 L} \Rightarrow \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}; \quad \psi = 0, 2\pi, 4\pi, \dots$$

На следващата страница са разгледани честотните зависимости (АЧХ и ФЧХ) на проводимостта и импеданса на паралелен трептящ кръг.

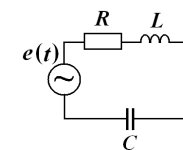
АЧХ и ФЧХ на адмитанса на паралелен трептящ кръг

Показани за АЧХ и ФЧХ на импеданса на паралелния RLC кръг. Сега се наблюдава противоположен ефект: $|Z|$ има максимум (т.е. $|Y|$ има минимум) на същата честота на резонанс ω_0 , където $|Z_{\max}| \rightarrow \omega^2 L^2 / R$ или $|Y_{\min}| \rightarrow R / \omega^2 L^2$. При малки честоти $\omega < \omega_0$ импедансът сега има капацитивен характер ($X > 0$), а при големи честоти $\omega > \omega_0$ – индуктивен характер ($X < 0$). При $R = 0$ паралелният RLC кръг има безкрайно голямо съпротивление $|Z_{\max}| \rightarrow \infty$.

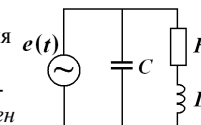


Физична същност на явлението “резонанс” в трептящ кръг

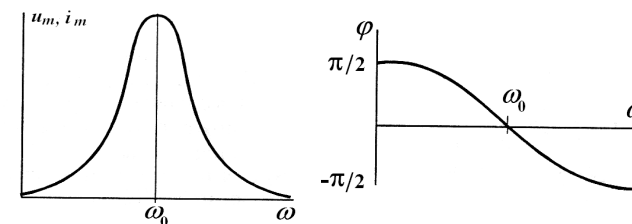
Досега показвахме, че при кръгова честота $\omega = \omega_0$ и за двата типа RLC трептящи кръгове има екстремум на импеданса – минимум в последователния кръг ($|Z_{\min}| \rightarrow R$, $|Y_{\max}| \rightarrow 1/R$) и максимум – в паралелния ($|Z_{\max}| \rightarrow \omega^2 L^2 / R$, $|Y_{\min}| \rightarrow R / \omega^2 L^2$). И в двата случая при тази честота импедансът (адмитансът) е чисто реална величина, а фазовата разлика между тока и напрежението е нула.



С други думи, при честота $\omega = \omega_0$ и в двата кръга се наблюдава нарастване на амплитудата на принудените трептения: при последователния кръг нараства амплитудата на напреженията върху реактивните елементи, а при паралелния – нараства амплитудата на тока през реактивните елементи. Това дава основание да се въведе параметър “качествен фактор” (вж. следващата част на лекцията). Описаното явление е известно като “резонанс” в трептящия кръг, а самият трептящ кръг е резонатор. В последователния кръг това е резонанс на напрежението, а в паралелния – резонанс на тока.



Типична резонансна крива на тока или напрежението



Лекция 7

7.3 Качествен (Q-) фактор на трептящи кръгове. Натоварен Q-фактор. Коефициент на връзката

Енергетична дефиниция на Q-фактора

Величината Q-фактор е известна като качествен фактор на трептящия кръг ("доброкачественост") и може да се дефинира като умножено по 2π отношение на запасената в резонатора (кръга) енергия W към енергията на загубите W_L за един период T (в израза долу P_L е мощността на загубите, а ω_0 е резонансната честота на кръга). Така

$$Q = 2\pi \frac{W}{W_L} = 2\pi \frac{W}{TP_L} = \omega_0 \frac{W}{P_L}$$

Ще проверим дали тази енергетична дефиниция за Q-фактора съпада с предишната. Ще изразим енергетичните характеристики чрез параметрите на кръга

$$W = \frac{1}{2} L |i|^2 = \frac{1}{2} C |\dot{U}|^2; \quad W_L = P_L T = \frac{1}{2} R |i|^2 T;$$

Запасяването на електромагнитната енергия става в реактивните елементи (електрическата – в кондензатора, а магнитната – в обината), а загубите се реализират в съпротивлението. Има и други механизми на загуби – диелектрични, магнитни, от излъчване и пр. Един от тях е свързан и с предаването на енергия през елементите за връзка на кръга с други части на схемите.

Като заместим изразите за енергетичните характеристики, получаваме израз за Q-фактора, получен от предишните разглеждания за резонанс в реактивните елементи, а именно:

$$Q = \omega_0 \frac{W}{P_L} = \omega_0 \frac{L}{R} = \frac{\sqrt{L/C}}{R} = \frac{\omega_0}{2\delta}$$

Q-фактор на RLC трептящ кръг

Нека да изразим падовете на напреженията върху трите елемента в последователния RLC трептящ кръг.

$$\dot{U}_R = iR; \quad \dot{U}_L = i\omega L; \quad \dot{U}_C = i \frac{1}{\omega C}$$

Можем да дефинираме следното отношение на падовете на реактивните елементи към пада върху съпротивлението при честота $\omega = \omega_0$, т. е.

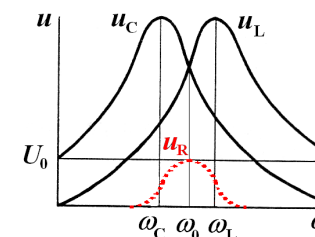
$$Q = \frac{U_L}{U_R} = \frac{\omega_0 L}{R} \quad Q = \frac{U_C}{U_R} = \frac{1}{\omega_0 C R}; \quad \text{или} \quad Q = \frac{\rho}{R} = \frac{\sqrt{L/C}}{R} = \frac{\omega_0}{2\delta}$$

Понеже обикновено $\delta \ll \omega_0$, величината Q е много по-голяма от единица, т. е. $Q \gg 1$. Какъв е физическият смисъл на подобна величина. На фигурата са показани резонансните честотни зависимости на падовете u_C , u_L и u_R . Всеки има резонанс на различна честота ω_C , ω_L и ω_0 и различно поведение, напр. $u_C \rightarrow U_0$ при $\omega \rightarrow 0$, $u_L \rightarrow U_0$ при $\omega \rightarrow \infty$, $u_R = U_0$ при $\omega = \omega_0$.

$$\omega_C \cong \omega_0 \left(1 - \frac{\delta^2}{\omega^2} \right); \quad \omega_L \cong \omega_0 \left(1 + \frac{\delta^2}{\omega^2} \right)$$

$$|\dot{U}_L| = |\dot{U}_C|; \quad |\dot{U}_L|, |\dot{U}_C| \gg U_R$$

Колкото по-малка е величината δ , толкова честотите ω_C , $\omega_L \rightarrow \omega_0$, а падовете u_C , u_L растат в сравнение с u_R , т. е. Q-факторът расте и обратно. Следователно, Q-факторът е свързан с енергетичните загуби в кръга (вж. нататък)



Дефиниция на Q-фактора чрез параметрите на резонансната крива

Накрая ще дадем една практическа дефиниция на Q-фактора чрез параметрите на резонансната крива на напрежението, тока или мощността в трептящия кръг. Първо ще преобразуваме израза за импеданса на кръга по следния начин:

$$Z = R + j \sqrt{\frac{L}{C}} \left(\omega \sqrt{LC} - \frac{1}{\omega \sqrt{LC}} \right) = R \left[1 + j \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) \right] = R [1 + jQ\xi]$$

Горе е въведена величината ξ , наречена *разстройка на честотата* на резонансния кръг. Ако допуснем, че текущата честота е близо до резонансната, т. е. $\omega = \omega_0 + \Delta\omega$, се получава

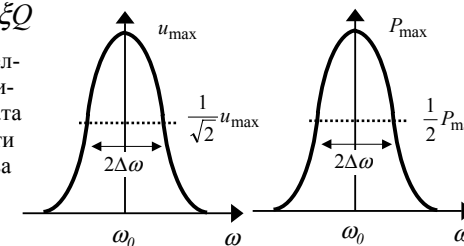
$$\xi = \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \approx \frac{2\Delta\omega}{\omega_0}; \quad \xi \xrightarrow{\omega \rightarrow \omega_0} 0 \quad 2\Delta\omega \text{ е ширината на резонансната крива на трептящия кръг (вж.)}$$

Сега честотните зависимости на модула и фазата на импеданса се представят така

$$|Z| = R \sqrt{1 + \xi^2 Q^2}; \quad \varphi = -\arctan \xi Q$$

Разстройката ξ се свързва с т. нар. избирателност на кръга – честотната лента, в която нивото на коефициента на предаване на схемата намалява $1/2$ пъти по мощност или $1/\sqrt{2}$ пъти по напрежение (ток) (вж. графиките). Тогава

$$\xi Q = \pm 1 \quad \text{или} \quad \Rightarrow \quad Q = \frac{\omega_0}{2\Delta\omega}$$



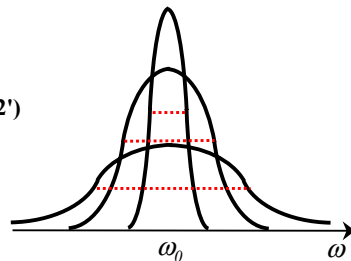
Изрази за Q-фактора на трептящ кръг

Да съберем всички изрази за Q-фактора. Има различни начини тази величина да бъде определена (измерена, изчислена). Може да се измери отношението на падовете напрежение върху кондензатора или бобината (u_C , u_L) и съпротивлението u_R (= ЕДН в схемата) (израз 1). Q-факторът може да се изчисли по измерените параметри на елементите в схемата C , L и R или G (израз 2). Може да се определи директно чрез измерване на резонансната честота ω_0 и декремента на затихване на сигнала τ (израз 2'). Енергетичното характеризиране на величината Q (израз 3) е най-трудно. Обратно, най-популярният и относително най-точен начин за определяне на Q-фактора е чрез параметрите на резонансната крива (израз 4). Обикновено се измерва резонансната крива на напрежението върху кондензатора или бобината, определя се резонансната честота и ширината на резонансната крива на ниво 0.707 от максимално измереното напрежение. На по-високи честоти се снима резонансната крива по мощност. Колкото по-широка е резонансната крива, толкова по-ниска е стойността на Q-фактора. В нискочестотната електроника типичните стойности на Q са ~ 10 -300.

$$Q = \frac{u_C}{u_R} = \frac{u_L}{u_R} \quad (1)$$

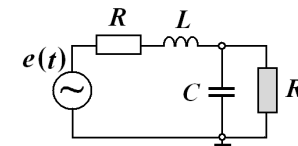
$$Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} = G \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (2) \quad Q = \frac{\omega_0}{2\delta} = \frac{1}{2} \omega_0 \tau \quad (2')$$

$$Q = \omega_0 \frac{W}{P_L} \quad (3) \quad Q = \frac{\omega_0}{2\Delta\omega} \quad (4)$$



“Натоварен” Q-фактор (влияние на товара)

Досега разгледахме “свободни”, ненатоварени RLC трептящи кръгове. При реалното използване на всеки резонансен кръг, той се “натоварва” с потребител – активно R_L или комплексно съпротивление Z_L , което променя характеристиките на кръга и основно неговия Q-фактор. Тогава се въвеждат два типа качествени фактора на RLC кръга:



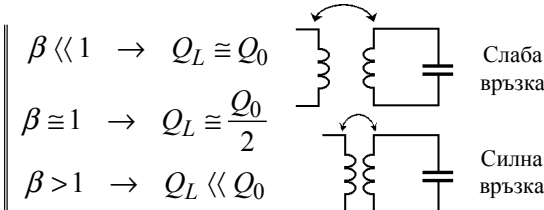
Собствен (“ненатоварен”) Q-фактор Q_0 и качествен фактор Q_L на натоварен резонатор (“натоварен” Q-фактор).

$$Q_L = \omega_0 \frac{W}{P_L + P_\beta}; \rightarrow \frac{1}{Q_L} = \frac{1}{Q_0} + \frac{1}{Q_\beta} \Rightarrow Q_L = \frac{Q_0}{1 + \beta} < Q_0; \quad \beta = \frac{Q_0}{Q_\beta}$$

Следователно, когато се измерва Q-фактор на даден кръг, той по принцип “се натоварва” и всъщност се измерва Q_L . Собственият Q-фактор Q_0 може да се определи, ако се измери коефициентът на връзката β , който зависи основно от товара R_L , но и от други фактори.

$$Q_L = \frac{\omega_0}{2\Delta\omega}$$

Могат да се класифицират 3 случая на “натоварване” на реален трептящ кръг: слаба връзка $\beta \ll 1$; силна връзка $\beta > 1$ и критична връзка $\beta \approx 1$.



Използване на трептящите кръгове

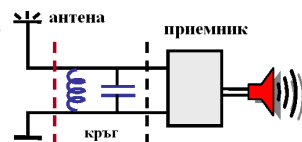
Трептящият кръг е класическият ниско-честотен резонатор. В това си качество той е едно от най-използваните пасивни електронни устройства.

Най-често RC, RL и RLC схемите са част от *електронните филтри* (вж. Лекция 8).

Трептящите кръгове са важна *честотно-задаваща схема* в електронните генератори и в *обратните връзки* в усилвателите (разгледани са във втората част на курса). Тук важно приложение имат и т. нар. *кварцови резонатори* (вж. следващата страница).

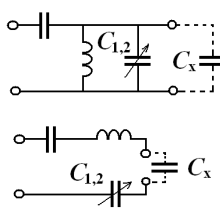
Трептящите кръгове се използват и за получаване на Q пъти *по-голямо напрежение* (чрез резонанс на напрежението) и *по-голям ток* (чрез резонанс на тока).

Трептящият кръг е класическа честотно-селектираща верига в радиоприемниците и в тв приемниците. Чрез настройка на резонансната му честота се “избира” коя радиостанция да бъде приета в радиоапарата (вж. илюстрацията на фигурата вдясно).

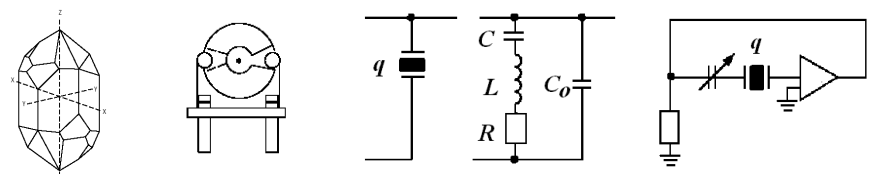


Трептящите кръгове са елементи и от много *измерителни схеми*.

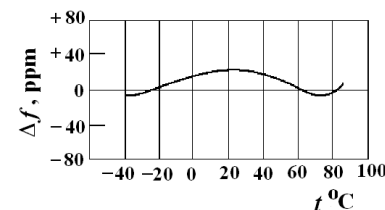
Тук се дискутира принципа на измерване при *LC метъра* (или т.нар. *Q-метър*). Основен елемент в него е т.нар. измерителен кондензатор – кондензатор с променлив капацитет и много малка паразитна индуктивност и съпротивление. При включване на неизвестна индуктивност и наблюдаване на резонанс може да се определи L_x и Q-фактора ѝ. Може да се измерва и неизвестен капацитет чрез последователно или паралелно включване на неизвестния кондензатор към измерителния (как точно може да се реализира това?).



Кварцови температурно-стабилизиращи резонатори



На фигурите горе последователно са изобразени кварцов монокристал, кварцов резонатор на негова основа, еквивалентна схема на резонатора и опростена схема на кварцов q -осцилатор. Благодарение на пиезоефекта, механичните трептения в кварцовия монокристал с подходящ срез (по определена ос на кристала) стабилизират резонансната му честота, която е невисока, ~ 10 MHz. Основното приложение на кварцовия резонатор е да стабилизира честотно изходния сигнал от кварцов осцилатор, което е известно още от 1920 г. Кварцовият резонатор играе роля на честотно-стабилна обратна връзка във веригата на електронен усилвател и така се създава стабилен източник.



Температурен ход на резонансната честота на кварцов кристал с подходящ срез. По-старите резонатори са се поддържали със стабилна резонансна честота при загряване в термостат. Съвременните q -осцилатори са стабилни и при стайна температура без термостатиране.

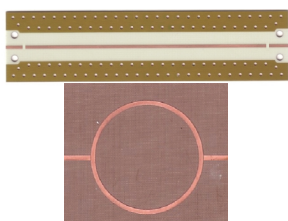
Високо-честотни резонатори



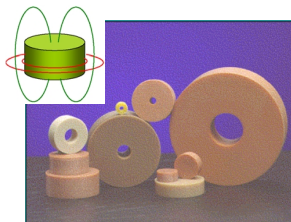
Аналози на трептящия кръг на високи честоти (над 300 MHz) са т. нар. *резонатори*. Също както и трептящия кръг, основното им свойство е да запасяват електромагнитна енергия на високи честоти. Различното тук е фактът, че те не се състоят просто от съсредоточени RLC елементи. Всъщност, на високи честоти всеки затворен диелектричен обем с метални или диелектрични стени, или със стени от смесен тип, представлява резонатор с резонансни честоти и качествен фактор на резонансните модове, които се възбуждат от външно поле. По-долу са показани три от най-известните примери за високочестотни резонатори: обемни метални резонатори, планарни резонатори върху тънки диелектрични подложки и диелектрични резонатори от материали с голяма диелектрична проникваемост, които "издърпват" електромагнитното поле близо до повърхността си. Q-факторите на резонаторите са различни: ~1000-15000 за обемните, ~150-300 за планарните, ~2000-10000 за диелектричните.



Обемни метални резонатори: отразящи от вълноводи



Планарни резонатори: микрентови структури върху диелектрична подложка

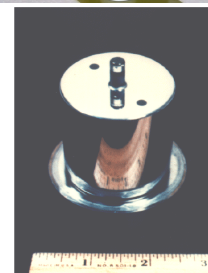


Диелектрични резонатори: материали с висока диелектрична проникваемост 20-40

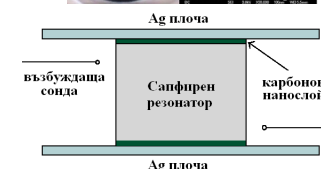
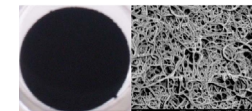
Измерителни резонатори с висок Q-фактор



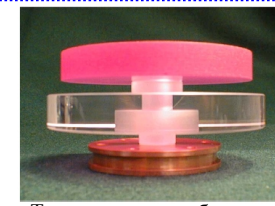
Квазиоптичен Фабри-Перо резонатор с отразяващи огледала. Използва се за измерване на висококачествени диелектрични материали



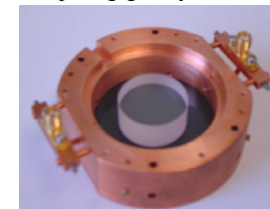
Цилиндричен сапфиров резонатор, покрит със свръхпроводящ $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_7$ слой вместо с обикновен метален (Au) екран; работи в парите на течен азот



Фотография със сканиращ електронен микроскоп на карбонови нанотръбички (CNT). Измерителна фикстура за изследване на сапфиров резонатор с нанослое на двете му основи



Температурно стабилизирани рубиново-сапфиров резонатор с Q-фактор ~187000 на WGR мод "whispering-gallery resonator"



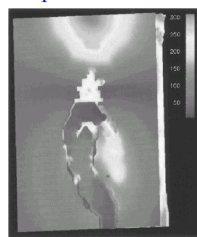
Сапфиров DR в Cu корпус с две заземяващи повърхности от HTSC слой; използва се за измерване на повърхнинното съпротивление

Човешкото тяло като резонатор при въздействие на RF-мощност

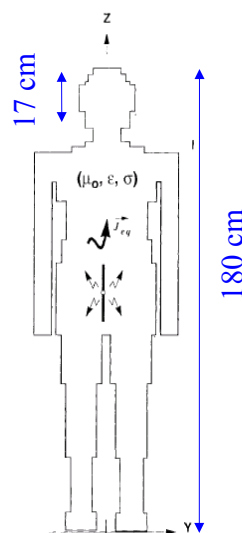


Има интересен пример за резонатор. Известно е, че средната дълбочина на проникване на микровълните в човешките тъкани е от няколко cm до няколко mm. Това е един естествен начин на защита на организма от облъчване, но може да се наблюдава усилване на това въздействие при резонансни ефекти. С други думи, човешкото тяло или негови части (напр. главата, ушите и пр.) се оказват диелектрични резонатори за определени честоти. Тогава въздействащото ниво на сигнала нараства с увеличаване на Q-фактора на подобен "резонатор". В такъв случай се наблюдава много по-ефективно нагряване на тъканите: **резонансно нагряване**.

За повечето възрастни хора резонансно нагряване на цялото тяло се получава в честотен обхват **60-100 MHz** (това са работните честоти на много FM-радиостанции!!). За децата, които имат по-дребен ръст, резонансните честоти растат до **150-200 MHz**. Резонансно нагряване на цялата човешка глава (със среден диаметър ~17 cm) се постига при ~**450 MHz**! Ухото също се оказва ефективен резонатор точно в GSM честотните обхвати.



Ухото като резонатор



Човешкото тяло и човешката глава като резонатори

Оценки на резонансна SAR в различни типове хора



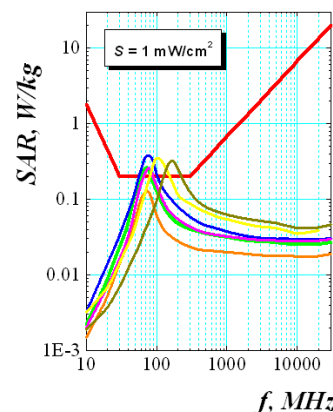
За характеризиране на въздействието на нейонизиращо излъчване върху живи тъкани се използва величината SAR (специфична абсорбирана мощност). Тя представлява осреднената стойност на погълнатата микровълнова енергия в 1 kg от тъканите на човек по израза

$$\text{SAR, W/kg} = P_{\text{abs}} = \frac{\sigma |E_{\text{local}}|^2}{\rho}$$

където σ е проводимост на тъканта в S/m, ρ е плътност в kg/m^3 , а $|E_{\text{local}}|^2$ е квадрата на средноквадратичното локално електрическо поле в тъканта в $(\text{V/m})^2$. От тази дефиниция е ясно, че величината **SAR е количествена мярка за локалната погълната енергия в дадена тъкан in-vivo**, както и **мярка за нейното локално нагряване** по израза

$$\frac{dT}{dt}, \text{ K/s} = \frac{\text{SAR}}{C_p}$$

където T е локалната абсолютна температура в K, а C_p е специфичният топлинен капацитет на разглежданата тъкан в J/kg K. Може да се направи модел тъканите на различни типове хора и да се определи SAR за цялото тяло. На фигурата вляво ясно се виждат резонансните ефекти на поглъщане на високочестотна мощност.



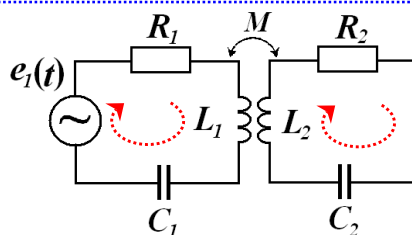
- Хигиенна норма
- Осреднен мъж
- Осреднен слаб мъж
- Осреднен дебел мъж
- Осреднена жена
- 5-годишно дете
- 1-годишно дете

Лекция 7

7.4 Свързани трептящи кръгове

Пример за два свързани трептящи кръга

По-надолу ще разгледаме конкретен пример за два свързани последователни трептящи кръга $R_1-C_1-L_1$ и $R_2-C_2-L_2$, които могат да взаимодействат помежду си чрез т.нар. "трансформаторна" връзка между двете индуктивности през взаимната им индуктивност $-j\omega M$, зависеща главно от разстоянието между тях. Записваме двата импеданса $Z_{1,2}$ и уравненията за двата кръгови тока $I_{1,2}$.



Системата може да се реши относно токовете; така може да се получи израз за тока в даден кръг, напр. I_1 в първия кръг, и да се сравни с този в единичния кръг I_{1s} . Ясно се вижда влиянието на втория кръг върху първия. От физична гледна точка вторият кръг внася в първия допълнителен импеданс, който зависи от ωM . "Внесеният" импеданс е честотно-зависим и има най-голяма стойност при честотата на резонанс ω_0 на единичния кръг. Така затихването в първия кръг расте при резонанса, колкото по-силна е връзката, т. е. величината M (вж. по-нататък количествени оценки).

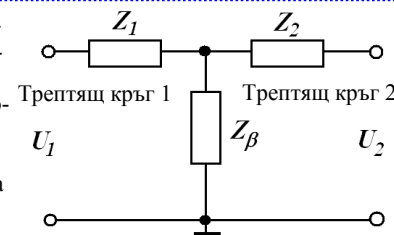
$$\dot{Z}_{1,2} = R_{1,2} + j \left(\omega L_{1,2} - \frac{1}{\omega C_{1,2}} \right)$$

$$\begin{cases} \dot{E}_1 = \dot{I}_1 Z_1 - (-j\omega M) \dot{I}_2 \\ 0 = \dot{I}_2 Z_2 - (-j\omega M) \dot{I}_1 \end{cases} \Rightarrow \dot{I}_2 = -\dot{I}_1 \frac{j\omega M}{Z_2}$$

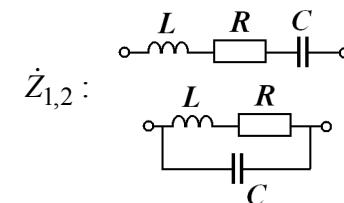
$$\Rightarrow \dot{I}_1 = \frac{\dot{E}_1}{Z_1 + \frac{\omega^2 M^2}{Z_2}} \quad \text{вместо} \quad \dot{I}_{1s} = \frac{\dot{E}_1}{Z_1}$$

Свързани трептящи кръгове. Връзка между тях

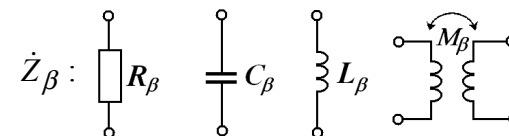
Трептящите кръгове могат да взаимодействат помежду си. В този случай се говори за т. нар. *свързани трептящи кръгове*. Има различни причини за използване на свързани кръгове. Едната е подобряване на "честотната избирателност" на кръга (увеличаване на честотния обхват на филтри, получаване на по-стръмни фронтове и пр.). Друга причина е възбуждане на трептящия кръг чрез друг кръг. Има и паразитни ефекти на взаимодействие между кръговете.



Показана е общата схема на два взаимодействащи трептящи кръга: Z_1 и Z_2 . Всеки един от тях може да е последователен или паралелен кръг, всеки със своята резонансна честота (или честоти) и Q-фактор. Връзката между тях се осъществява чрез импеданса Z_β от резистивен, капацитивен, индуктивен или смесен тип.



На фигурата вдясно са показани най-често срещаните типове връзки: чрез общо съпротивление R_β , общ капацитет C_β , обща индуктивност L_β , или взаимна индуктивност M_β .



Анализ на свързани трептящи кръгове

Нека за простота да изберем $R_1 = R_2 = R$, $C_1 = C_2 = C$, $L_1 = L_2 = L$. Ще определим АЧХ на коефициента на предаване на кръга (връзката между изходния ток I_2 и входно напрежение $E_1 = E$). След преобразувания се получава израз:

$$L \left[(j\alpha - \xi)^2 - \beta^2 \right] \dot{I}_2 = \left(\frac{\beta}{\omega} \right) \dot{E}$$

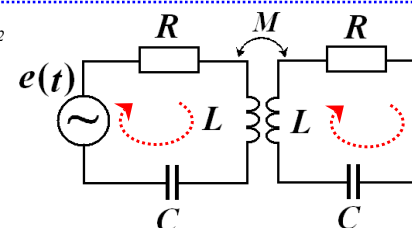
Където са въведени следните известни означения (ω_0 – резонансната честота на единичния кръг, ξ – честотната разстройка; $\alpha = 1/Q$ – затихването на сигнала в кръга; β – коефициента на връзка между двата кръга:

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC}; \quad \xi = \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}; \quad \beta = \frac{\omega M}{\omega_0 L}; \quad \alpha = \frac{R}{\omega_0 L} = R \sqrt{\frac{C}{L}} = \frac{2\delta}{\omega_0} = \frac{1}{Q}$$

Сега можем да определим модула на коефициента на предаване $K(\omega) = LI_2/E$.

$$|K(\omega)| = \left| \frac{\beta}{\omega} \right| \frac{1}{\sqrt{(\xi^2 - \alpha^2 - \beta^2)^2 + 4\xi^2\alpha^2}}$$

Ще анализираме израз. При $\xi \gg 1$ (далече от резонанса на единичен кръг), $|K(\omega)| \sim 1/\xi^2$, както при единичен кръг. При малки стойности на разстройката, обаче, поведението на $|K(\omega)|$ на свързаните кръгове може съществено да се отличава от това в единичния кръг (вж. следващата страница).



Резонансни честоти в свързани трептящи кръгове

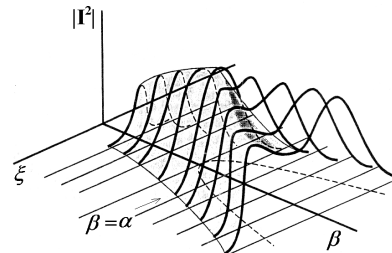
Нека да изследваме величината $|K(\omega)|$ за наличие на екстремум (като приравним на 0 производната на знаменателя; числителят $\beta/\omega = M/\omega_0 L = \text{const}$):

$$\xi(\xi^2 - \alpha^2 - \beta^2) + 2\alpha^2 = 0$$

Уравнението има 3 решения за ξ , отговарящи на 3 резонансни максимума на $|K(\omega)|^2$, или респективно, на тока $|I_2(\omega)|^2$ (вж. фигурата вдясно).

$$\xi_0 = 0 \quad (\beta < \alpha); \quad \xi_{1,2}^2 = \beta^2 - \alpha^2 \quad (\beta > \alpha)$$

Да анализираме тези решения. Решението $\xi = 0$ при слаба връзка $\beta < \alpha$ отговаря на резонанса на единичния трептящ кръг при ω_0 . При увеличаване на степента на връзката до критична $\beta \sim \alpha$ резонансната крива остава "едно-гърба", стойността в максимума $\omega = \omega_0$ расте, а кривата се разширява. Качествено ново поведение се наблюдава при превишаване на степента на връзка над критичната $\beta > \alpha$. Резонансната крива става "дву-гърба", има два максимума, отговарящи на две нови резонансни честоти $\omega_{1,2}$ (вж. изразите долу за частен случай), а при честота $\omega \sim \omega_0$ се наблюдава минимум. Колкото по-силна става връзката, толкова повече двата максимума се раздалечават, а минимумът се задълбочава. Това е ефективно разширяване на честотната лента на свързаните кръгове, а стръмността на фронтите расте. Този ефект се използва при многозвенните филтри.



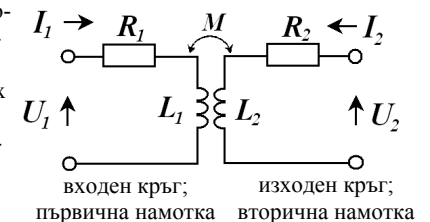
Лекция 7

7.4 Трансформатори

Трансформаторът като два силно свързани трептящи кръга

В електронните схеми се използва един много популярен тип свързани трептящи кръгове със силна връзка – т. нар. *трансформатори*. Всъщност, тези кръгове нямат резонансни свойства. При тях взаимодействат силно два свързани индуктивни елемента, които имат малко собствено съпротивление, а капацитетът им се пренебрегва.

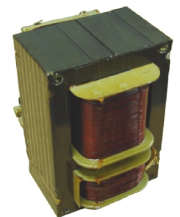
Типична схема на трансформатор е показана на фигурата. Тя включва два кръга с елементи L_1 – R_1 и L_2 – R_2 . Отново можем да запишем общите изрази и да определим отношението на тока I_2 във вторичната намотка и тока I_1 в първичната намотка на трансформатора



$$\dot{Z}_{1,2} = R_{1,2} + j\omega L_{1,2} \quad \left\{ \begin{array}{l} \dot{U}_1 = \dot{I}_1 Z_1 - j\omega M \dot{I}_2 \\ 0 = \dot{I}_2 Z_2 - j\omega M \dot{I}_1 \end{array} \right. \Rightarrow \frac{\dot{I}_2}{\dot{I}_1} = \frac{j\omega M}{Z_2}$$

Изразите са подобни на тези при свързаните кръгове, но има и различия. Трансформаторът се използва да прехвърли максималната мощност от генератора в първичната намотка към вторичната и, следователно, токът I_2 във вторичната намотка трябва да има максимална амплитуда. Това е възможно при максимално силна връзка $\beta = \pm 1$ и при малки резистивни съпротивления $R_1 \ll \omega L_1$ и $R_2 \ll \omega L_2$.

Посочените горе две изисквания съставляват условията за т. нар. *идеална трансформация*.



Трансформация на ток

Условието за максимална връзка означава

$$\beta = \frac{\pm M}{\sqrt{L_1 L_2}} \cong \pm 1; \quad \alpha = \frac{R_1}{\omega L_1} \rightarrow 0$$

При тези условия коефициентът на предаване по ток е

$$\Rightarrow \dot{K}_I = \frac{\dot{I}_2}{\dot{I}_1} \cong \frac{M}{L_2} \cong \frac{L_1}{M} \xrightarrow{\beta=1} \sqrt{\frac{L_1}{L_2}} = \frac{1}{n}; \quad n = \sqrt{\frac{L_2}{L_1}} \cong \frac{N_2}{N_1}$$

А връзката на тока във вторичната намотка с напрежението в първичната е

$$(L_1 R_2 + L_2 R_1) \dot{I}_2 \cong M \dot{U}_1$$

В изразите горе е използвана величината коефициент на трансформация n : отношение на корените на стойностите на индуктивността във вторичната и първичната намотки на трансформаторните бобини. Понеже индуктивността на една бобина, получена от навит върху сърдечник с магнитни свойства проводник, е $L \sim D \mu N^2$ ($\mu \gg 1$ – магнитна проницаемост на материала на трансформаторния “сърдечник” – ферит, феромагнитна стомана и пр.; D – коефициент на формата на намотките на бобините и $N_{1,2}$ – броят проводникови навивки в дадена бобина) се оказва, че коефициентът на трансформация n е просто пропорционален на броя навивки във вторичната и първичната намотки.

Трансформация на напрежение

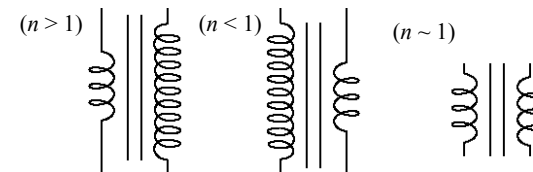
Нека сега да определим коефициентът на предаване по напрежение от първичната към вторичната намотка на трансформатора:

$$\dot{K}_U = \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} = \frac{\omega L_2 \dot{I}_2}{\omega L_1 \dot{I}_1} \cong n^2 \frac{1}{n} = n \cong \frac{N_2}{N_1}$$

$$(\text{за сравнение}) \quad \dot{K}_I = \frac{1}{n}$$

Така могат да се класифицират следния тип трансформатори:

- 1) повишаващ ($n > 1$);
- 2) понижаващ ($n < 1$);
- 3) прехвърлящ (изолиращ) ($n \sim 1$).



От казаното дотук може да се направи следното заключение при идеална трансформация произведението на тока и напрежението във всяка намотка се запазва (израз на закона за запазване на енергията при липса на топлинни загуби). Понижаването на напрежението от първичната към вторичната намотка означава повишение на тока във вторичната спрямо първичната и обратно. Това свойство е основата на голяма част от приложенията на трансформатора.

$$U_1 I_1 \cong U_2 I_2$$

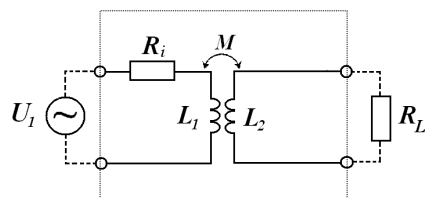
$$\frac{U_2}{U_1} = n \quad \frac{I_2}{I_1} = \frac{1}{n}$$

Трансформация на съпротивления

Макар и по-малко известно, важно свойство на трансформатора е да преобразува съпротивлението – трансформатор на съпротивления. Това свойство има пряко отношение към вече разгледания в Лекция 3 проблем за съгласуване на източника и товара. Как може да се използва трансформатор за съгласуване на различни съпротивления.

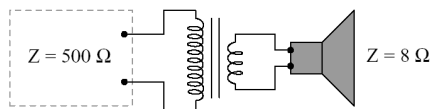
В първичната и вторичната намотки се отделят следните мощности:

За да има максимална ефективност на предаване на мощност, двете величини P_1 и P_2 трябва да са равни. Това води до дадената връзка между съпротивленията, където в първичната намотка $R_1 = R_i$ е вътрешното съпротивление на източника, а във вторичната $R_2 = R_L$ е товарното съпротивление. Това свойство намира приложения при съгласуване на товар и източник в електрониката. Най-известен е показният случай от аудио-техниката: съгласуване на ниско-омни слушалки и говорители към високоомен усилвател. Използва се и обратният процес: съгласуване на ниско-омно съпротивление на източник с високоомен товар.



$$P_1 = \frac{1}{2} \dot{I}_1^2 R_1; \quad P_2 = \frac{1}{2} \dot{I}_2^2 R_2; \quad P_1 \approx P_2$$

$$\frac{R_2}{R_1} = n^2 \Rightarrow R_1 = R_i \cong \frac{R_L}{n^2} \ll R_L$$



$$1/n = \sqrt{500:8} = 7.906$$

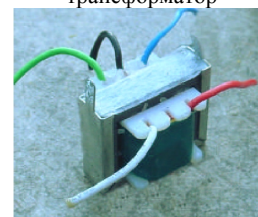
Трансформатори



Универсален мрежов трансформатор



Високоволтов понижаващ трансформатор



Маломощен съгласуващ трансформатор

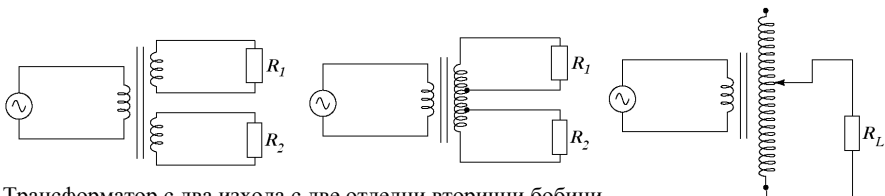


Трансформатори върху платки



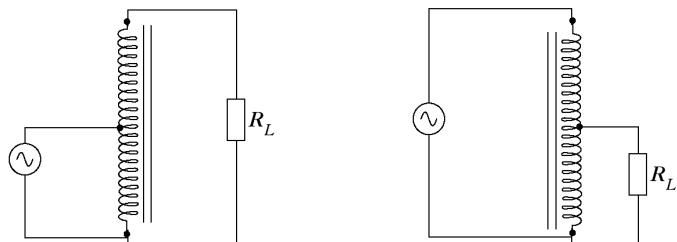
Токов трансформатор

Типове трансформатори и някои техни приложения



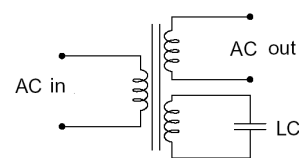
Трансформатор с два изхода с две отделни вторични бобини или с използване на различни части на една бобина

Променлив (настройваем) трансформатор

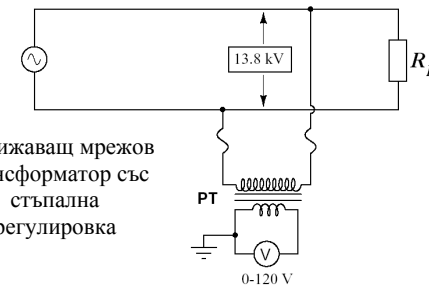


Два типа автотрансформатори с една намотка с регулировка на входа или на изхода

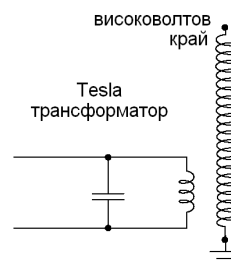
Типове трансформатори и някои техни приложения



Трансформатор с резонансен LC товар



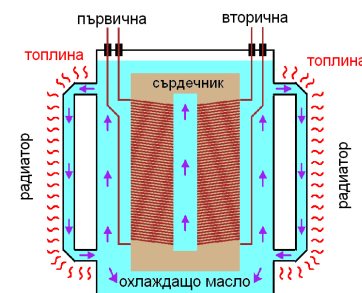
Понижаващ мрежов трансформатор със стъпална регулировка



Тесла трансформатор



Трансформатор на Tesla за иницииране на високоволтов разряд



Охлаждаем трансформатор