Семинар “Фурие преобразувания”

Периодични сигнали

Фурие преобразувание, представено чрез реални функции

- Обратно Фурие преобразувание (представя TD формата на сигнала)

$$A(t)=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos(n\omega t)+\sum_{n=1}^{\infty}B_n\sin(n\omega t)$$

- Право Фурие преобразувание (представя FD формата на сигнала, т.е. неговите спектрални съставящи)

$$A_0=\frac{2}{T}\int_0^T A(t)dt$$

Това е dc съставящата в спектъра на сигнала; появява се в спектъра, само ако в TD формата на сигнала има четни съставки

$$A_n=\frac{2}{T}\int_0^T A(t)\cos(n\omega t)dt$$

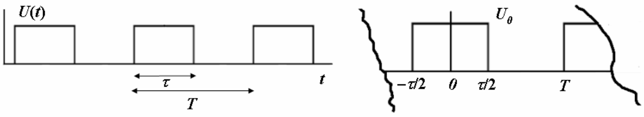
Това са честотните съставки, които се появяват в спектъра на четни сигнали $A(t)=A(-t)$. При нечетни сигнали те отсъстват.

$$B_n=\frac{2}{T}\int_0^T A(t)\sin(n\omega t)dt$$

Това са честотните съставки, които се появяват в спектъра на нечетни сигнали $A(t)=-A(-t)$. При четни сигнали те отсъстват.

Забележка: при нито четни, нито нечетни сигнали, в спектъра се съдържат всички съставки

Класически пример – периодичен правоъгълен импулс



Избираме началото на координатната система по времевата ос в средата на импулса (за да се опростят изчисленията). Тогава импулса (нека да е напрежение) се описва с функцията:

$$U(t)=\begin{cases}U_0; & t\in(-\tau/2;\tau/2)\\ 0; & t\in(\tau/2;T)\end{cases}$$

Това е импулс, представен с четна функция. Следователно съставките $B_n\equiv 0$ ще липсват от спектъра му. Тогава:

$$U(t)=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos(n\omega t)+0$$

1. Dc съставката е:

$$A_0=\frac{2}{T}\int_0^T A(t)dt=\frac{2}{T}\int_{-\tau/2}^{\tau/2}U_0dt+\frac{2}{T}\int_{\tau/2}^{T}0.dt=\frac{2\tau}{T}U_0$$

Периодичен правоъгълен импулс (прод.)

2. Четните съставящи в спектъра се определят от:

$$A_n=\frac{2}{T}\int_0^T A(t)\cos(n\omega t)dt=\frac{2}{T}\int_{-\tau/2}^{\tau/2}U_0\cos(n\omega t)dt\frac{n\omega}{n\omega}=\frac{2U_0}{Tn\omega}\int_{-\tau/2}^{\tau/2}\cos(n\omega t)dn\omega t=$$

$$=\frac{2U_0T}{Tn2\pi}\int_{-\tau/2}^{\tau/2}d[\sin(n\omega t)]=\frac{U_0}{n\pi}\sin(n\omega t)\Big|_{-\tau/2}^{\tau/2}=\frac{U_0}{n\pi}\left[2\sin\left(n\omega\frac{\tau}{2}\right)\right]=$$

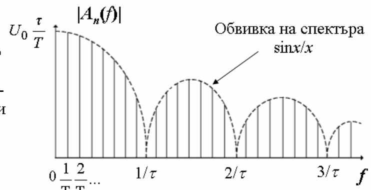
$$=\frac{U_0}{n\pi}2\sin\left(n\frac{2\pi}{T}\frac{\tau}{2}\right)=2\frac{\tau}{T}U_0\frac{\sin\left(n\pi\frac{\tau}{T}\right)}{n\pi\frac{\tau}{T}}$$

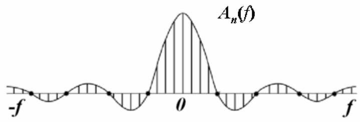
Окончателно се получава следният класически израз (виж коментар на другата страница):

$$U(t)=U_0\frac{\tau}{T}\left[1+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\left(n\pi\frac{\tau}{T}\right)}{n\pi\frac{\tau}{T}}\cos\left(n\frac{2\pi}{T}t\right)\right]$$

Графична форма на спектъра на класическия периодичен правоъгълен импулс

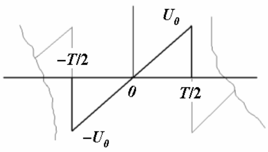
Показан е неограниченият спектър на периодичния правоъгълен импулс. Това е класически тип спектър, особено известен в цифровите комуникационни системи. Горе е показано физично представяне на сигнала само за положителни стойности на честотата за модула на амплитудите на съставящите. Долу е показано математическото представяне на спектралните съставящи съобразно техния знак, както за положителни, така и за отрицателни стойности на честотата. И двете представяния се използват: първо по-често при представяне на сигнали в основна лента, а второто – при представяне на модулирани сигнали, като началото на координатната система се премества за носещата честота f_c.





Коментар: Спектралните съставящи са разположени на интервал $1/T$ една от друга (т.е. на n/T или nf). Амплитудата им се ограничава в рамките на т. нар. “обвивка на спектъра”, в случая – функцията $\sin x/x$). На определени честоти (нулите на функцията $\sin x/x$: $n\pi$) амплитудите на съставящите се нулират – през интервали $1/\tau$ ($\tau< T$) (вж коментар и по-нататък).

Друг пример – трионообразен импулс



За избраната координатна система времевата форма на импулса се описва с функцията:

$$U(t)=U_0\frac{2t}{T};\quad t\in\left(-\frac{T}{2};\frac{T}{2}\right)$$

Тя е нечетна функция $A(t)=-A(-t)$ и в спектъра присъстват само нечетните съставки B_n, т. е.

$$U(t)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\sin(n\omega t)$$

Полезно: формула за “интегриране по части”

$$\int udv=uv-\int vdu$$

Изчисляваме аналитично спектралните съставки като използваме формулата за интегриране по части

$$B_n=\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2}U_0\frac{2t}{T}.\frac{n\omega}{n\omega}.\sin(n\omega t)dt\frac{n\omega}{n\omega}=\frac{4U_0}{T^2n^2\omega^2}\int_{-T/2}^{T/2}(n\omega t)\sin(n\omega t)d(n\omega t)$$

Използваме пресмятанията и заместваме горе:

$$\int x\sin xdx=-\int xd\cos x=-x\cos x+\int\cos xdx=-x\cos x+\sin x$$

Трионообразен импулс (прод.)

Заместваме:

$$B_n=\frac{4U_0T^2}{T^2n^24\pi^2}\left[\sin(n\omega t)-(n\omega t)\cos(n\omega t)\right]_{-T/2}^{+T/2}=$$

$$=\frac{U_0}{n^2\pi^2}\left[2\sin\left(n\omega\frac{T}{2}\right)-2\left(n\omega\frac{T}{2}\right)\cos\left(n\omega\frac{T}{2}\right)\right]$$

Тук: $n\omega\frac{T}{2}=n\frac{2\pi}{T}\frac{T}{2}=n\pi;\quad \cos(n\pi)=(-1)^n;\quad \sin(n\pi)=0$

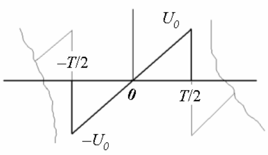
Тогава: $B_n=\frac{U_0}{n^2\pi^2}2[\sin(n\pi)-n\pi\cos(n\pi)]=-\frac{2U_0}{n\pi}\cos(n\pi)=\frac{2U_0}{n\pi}(-1)^{n+1}$

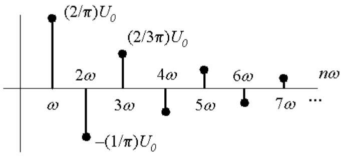
Окончателно: $$A(t)=U_0\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin(n\omega t)$$

или: $$A(t)=U_0\frac{2}{\pi}\left[\sin(\omega t)-\frac{1}{2}\sin(2\omega t)+\frac{1}{3}\sin(3\omega t)-\frac{1}{4}\sin(4\omega t)+...\right]$$

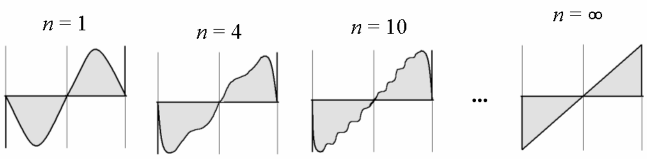
Забележка: виж графичното представяне на следващата страница.

Спектър на трионообразния импулс

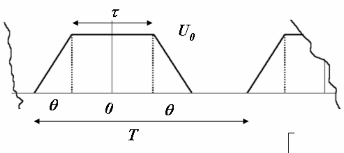




На графиката горе е показан неограниченият спектър на периодичния трионообразен импулс. Спектралните съставящи са разположени на кратни честоти $n\omega$ (или nf) с намаляваща амплитуда както ($1/n$) и алтернативен знак. На фигурите долу са дадени обратно възстановените TD зависимости на импулса (в рамките на 1 период) при запазване на различен брой спектрални съставящи n = 1, 4, 10, ... ∞.

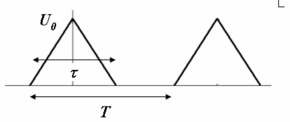


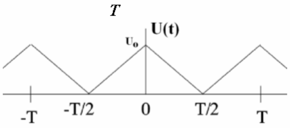
Други примери за самостоятелна работа



Да се определят спектрите на посочените периодични сигнали.

Отг. $$U(t)=U_0\frac{\tau}{T}\left[1+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\left(n\pi\frac{\tau}{T}\right)}{n\pi\frac{\tau}{T}}\frac{\sin\left(n\pi\frac{\theta}{T}\right)}{n\pi\frac{\theta}{T}}\cos\left(n\frac{2\pi}{T}t\right)\right]$$



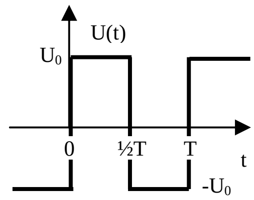


Стратегия за работа:

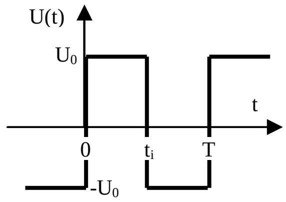
1. Да се определи аналитичният вид на времевата зависимост на дадения сигнал;
2. За се намерят аналитични изрази за всички спектрални съставящи на сигнала;
3. Да се начертае качествено спектъра на дадените сигнали
4. Да се определи ефективната ширина на спектъра.

Още задачи за периодични импулси:

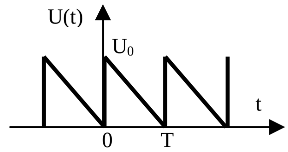
Зад.1.1 Показаният на фигурата периодичен импулс се подава на входа на ниско-честотен LC филтър с елементи L и C. Определете колко спектрални съставящи *n* ще преминат през филтъра, ако периодът на импулса е T. (Указание: Определете спектъра на импулса чрез реда на Фурие и изразете разстоянието между спектралните съставящи. Определете броя съставящи, които са намират в честотния интервал от $\omega = 0$ до критичната честота на филтъра ω_C).



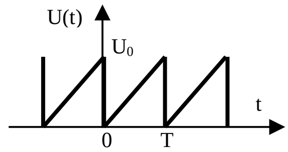
Зад.1.1а Определете броя на спектралните съставящи в основната част на спектъра на периодичен правоъгълен сигнал, показан на фигурата. По условие продължителността на импулса е t_i = 5 ms, а периода на повторение е T = 10 ms. С колко ще се промени този брой, ако продължителността на импулса се намали на t_i = 0.1 ms, без да се променя периода му. (Указание: за да решите задачата определете първата нула на обвивката на спектъра, т.е. на функцията $\sin x / x$. Освен това, изберете началото на координатната система така, че функцията U(t) да бъде четна при промяна на знака на времето ±t).



Зад.1.2 Определете първите три спектрални съставящи от спектъра на периодичния импулс, показан на фигурата и описван математически със зависимостта $U(t) = U_0\left(1 - \frac{t}{T}\right)$. (Указание: за да решите задачата по-лесно, изберете началото на координатната система така, че функцията U(t) да бъде нечетна при промяна на знака на времето ±t. Разбира се, трябва да се преработи и математическият израз за вида на функцията).

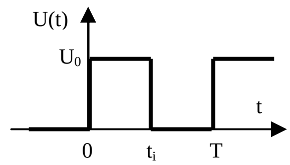


Зад.1.2а Определете първите три спектрални съставящи от спектъра на периодичния импулс, показан на фигурата и описван математически със зависимостта $U(t) = \frac{U_0}{T} t$. (Указание: за да решите задачата по-лесно, изберете началото на координатната система така, че функцията U(t) да бъде нечетна при промяна на знака на времето ±t. Разбира се, трябва да се преработи и математическият израз за вида на функцията).



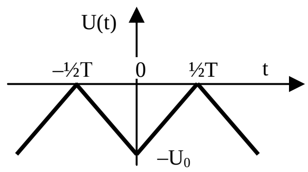
Зад.1.3 Сложен сигнал U(t) се състои от 3 прости синусоидални сигнала с честоти f_1 = 30 kHz, f_2 = 15 kHz и f_3 = 45 kHz и измерени ефективни стойности на напрежението U_1 = 0.5 V, U_2 = 1.0 V и U_3 = 0.1 V. Определете амплитудите и честотите на спектралните съставящи на сигнала. За да решите задачата използвайте, че $\int_0^T \sin\omega t \sin n\omega t\, dt = 0$ при $n \neq 1$.

Зад.1.3а Определете броя на спектралните съставящи в основната част на спектъра на периодичен правоъгълен сигнал, показан на фигурата. По условие продължителността на импулса е t_i = 0.5 ms, а периода на повторение е T = 10 ms. С колко ще се промени този брой, ако периода се увеличи на T = 50 ms, без да се променя продължителността на импулса. (Указание: за да решите задачата определете първата нула на обвивката на спектъра, т.е. на функцията $\sin x / x$. Освен това, изберете началото на координатната система така, че функцията U(t) да бъде четна при промяна на знака на времето ±t).

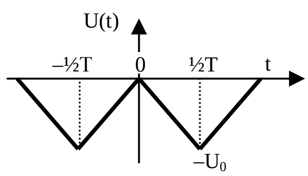


Зад.1.3б Сложен сигнал U(t) се състои от 3 прости косинусоидални сигнала с честоти f_1 = 30 MHz, f_2 = 15 MHz и f_3 = 45 MHz и измерени ефективни стойности на напрежението U_1 = 0.25 V, U_2 = 0.5 V и U_3 = 0.05 V. Определете амплитудите и честотите на спектралните съставящи на сигнала. За да решите задачата използвайте, че $\int_0^T \cos\omega t \cos n\omega t\, dt = 0$ при $n \neq 1$.

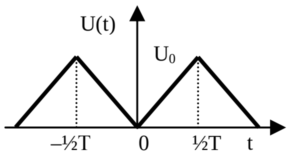
Зад. 4 Определете модула на спектъра на показания на фигурата периодичен сигнал, описван математически със зависимостта $U(t) = U_0\left(1 \mp \frac{2t}{T}\right)$, където знакът "+ " се отнася за времена t ∈ (0, ½T), а знакът "– " - за времена t ∈ (–½T, 0).



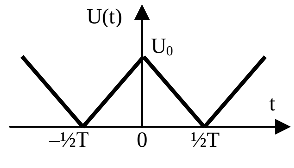
Зад.1.4а Определете модула на спектъра на показания на фигурата периодичен сигнал, описван математически със зависимостта $U(t) = \mp U_0 \frac{2t}{T}$, където знакът "+" се отнася за времена t ∈ (0, ½T), а знакът "–" - за времена t ∈ (–½T, 0). Определете и амплитудите на първите три съставящи. (Указание: Използвайте ред на Фурие).



Зад.1.4б Определете модула на спектъра на показания на фигурата периодичен сигнал, описван математически със зависимостта $U(t) = \mp U_0 \frac{2t}{T}$, където знакът "–" се отнася за времена t ∈ (0, ½T), а знакът "+" - за времена t ∈ (–½T, 0). Определете и амплитудите на първите три съставящи. (Указание: Използвайте ред на Фурие).



Зад.1.4в Определете модула на спектъра на показания на фигурата периодичен сигнал, описван математически със зависимостта $U(t) = U_0\left(1 \mp \frac{2t}{T}\right)$, където знакът "–" се отнася за времена t ∈ (0, ½T), а знакът "+" - за времена t ∈ (–½T, 0). Определете и амплитудите на първите три съставящи. (Указание: Използвайте ред на Фурие).



Непериодични сигнали

Директно Фурие преобразувание за непериодични сигнали

➢ Интегрално обратно Фурие преобразувание (представя TD формата на непериодичния сигнал в комплексен вид)

$$\dot{A}(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\dot{S}(\omega)e^{\mathrm{j}\omega t}d\omega$$

➢ Интегрално право Фурие преобразувание (представя FD формата на сигнала, неговият комплексен спектър)

$$\dot{S}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty}\dot{A}(t)e^{-\mathrm{j}\omega t}dt$$

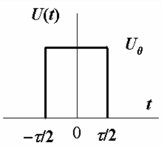
Така, в резултат на интегралните преобразувания FD формата на сигнала се представя с комплексна функция – спектър на сигнала със следното представяне:

$$\dot{S}(\omega) = |S(\omega)|e^{-\mathrm{j}\varphi(\omega)} \qquad \dot{S}(\omega) = \frac{d\dot{A}}{d\omega}$$

$|S(\omega)|$ – Амплитудно-честотна характеристика (АЧХ)

$\varphi(\omega)$ – Фазово-честотна характеристика (ФЧХ)

Извеждане на спектъра на единичен правоъгълен импулс



Нека единичният импулс има графичното представяне, дадено на фигурата, което може да се изрази аналитично по следния начин:

$$U(t) = \begin{cases} U_0; & t \in (-\tau/2;\tau/2) \\ 0; & t \in \text{другаде} \end{cases}$$

Пресмятаме аналитично неговия спектър:

$$\dot{S}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty}\dot{A}(t)e^{-\mathrm{j}\omega t}dt = U_0\int_{-\tau/2}^{\tau/2}e^{-\mathrm{j}\omega t}dt.\frac{-\mathrm{j}\omega}{-\mathrm{j}\omega} = \frac{U_0}{-\mathrm{j}\omega}\int_{-\tau/2}^{\tau/2}e^{-\mathrm{j}\omega t}d(-\mathrm{j}\omega t) =$$

$$\frac{U_0}{-\mathrm{j}\omega}e^{-\mathrm{j}\omega t}\Big|_{-\tau/2}^{\tau/2} = \frac{U_0}{\mathrm{j}\omega}\left[-e^{-\mathrm{j}\omega\frac{\tau}{2}} + e^{+\mathrm{j}\omega\frac{\tau}{2}}\right] = U_0\frac{\sin\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)}{\frac{\omega\tau}{2}}\tau$$

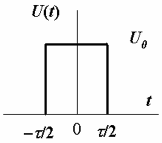
Окончателно:

$$\boxed{\dot{S}(\omega) = U_0\tau\frac{\sin\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)}{\frac{\omega\tau}{2}}}$$

Забележка: използвани са формулите на Ойлер

$$\sin x = \frac{e^{\mathrm{j}x} - e^{-\mathrm{j}x}}{2\mathrm{j}}; \qquad \cos x = \frac{e^{\mathrm{j}x} + e^{-\mathrm{j}x}}{2}$$

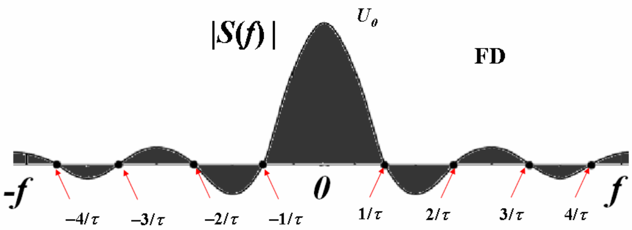
Спектър на единичния правоъгълен импулс



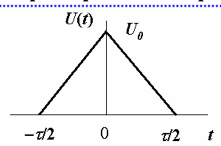
Нека единичният импулс има графичното представяне, дадено на фигурата, което може да се изрази аналитично по следния начин:

$$\boxed{|\dot{S}(f)| = U_0\frac{\sin(\pi f\tau)}{\pi f}}$$

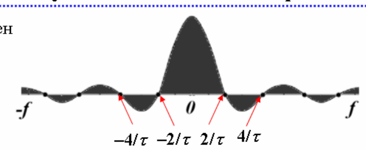
Окончателно:



Примери за не-периодични импулс за самостоятелна работа

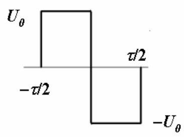


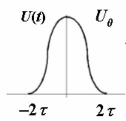
Графичен отговор



Да се определят спектрите на посочените не-периодични сигнали.

Задача: Да се покаже, че спектърът на Гаусовия импулс е също Гаусов импулс (единственият сигнал с подобно свойство)

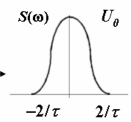


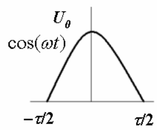


$$U(t) = U_0e^{-t^2/2\tau^2}$$

Отг.

$$S(\omega) = \sqrt{2\tau}U_0e^{-\omega^2\tau^2/2}$$





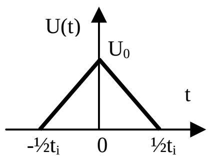
1. Да се определи аналитичният вид на времевата зависимост на дадения не-периодичен сигнал;
2. За се намерят аналитични изрази за комплексния спектър на сигнала и да се определят изрази за АЧХ и ФЧХ;
3. Да се начертае качествено спектъра на дадените сигнали
4. Да се определи ефективната ширина на спектъра.

Още задачи за непериодични импулси:

Зад.2.1 Определете модула на спектъра |S(ω)| на единичен триъгълен импулс, описван математически със зависимостта

$$U(t) = \begin{cases} U_0(1 - 2t/t_i), & t \in (0, t_i/2) \\ U_0(1 + 2t/t_i), & t \in (-t_i/2, 0) \end{cases}$$

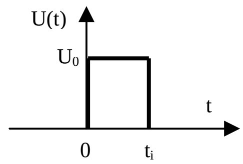
Определете стойността на спектралната съставяща |S(0)| при честота $f = 0$. (Указание: Използвайте интеграл на Фурие).



Зад.2.2 Определете и начертайте качествено модула на спектъра |S(ω)| на единичния правоъгълен импулс, описван математически със зависимостта

$$U(t) = \begin{cases} U_0 & t \in (0, t_i). \\ 0 & \text{другаде} \end{cases}$$

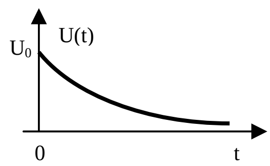
Определете ефективната широчина на спектъра от честота f = 0 до първата нула на обвивката на спектралните съставящи (т. е. на функцията $\sin x / x$). Как ще се промени тази широчина, ако продължителността на импулса t_i се увеличи двойно?



Зад.2.3а Определете и начертайте качествено модула на спектъра |S(ω)| на единичен експоненциален импулс, описван математически със зависимостта

$$U(t) = \begin{cases} U_0\exp(-\alpha t), & t > 0. \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

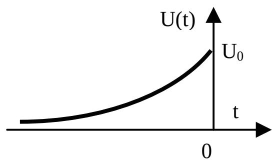
Определете стойността на спектралната съставяща |S(0)| при честота $f = 0$.



Зад.2.3б Определете и начертайте качествено модула на спектъра |S(ω)| на единичен експоненциален импулс, описван математически със зависимостта

$$U(t) = \begin{cases} U_0\exp(\alpha t), & t < 0. \\ 0, & t > 0 \end{cases}$$

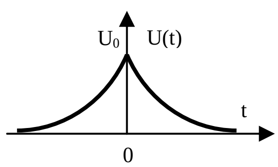
Определете стойността на спектралната съставяща |S(0)| при честота f = 0.



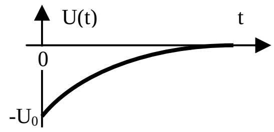
Зад.2.3в Определете и начертайте качествено модула на спектъра |S(ω)| на двоен експоненциален импулс, описван математически със зависимостта

$$U(t) = \begin{cases} U_0\exp(\alpha t), & t < 0. \\ U_0\exp(-\alpha t), & t > 0 \end{cases}$$

Определете стойността на спектралната съставяща |S(0)| при честота f = 0.

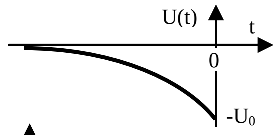


Зад.2.3г Определете и начертайте качествено модула на спектъра |S(ω)| на единичен експоненциален импулс, описван математически със зависимостта $U(t)=\begin{cases}-U_0\exp(-\alpha t), & t>0\\ 0, & t<0\end{cases}.$

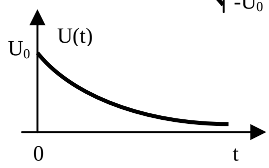


Определете стойността на спектралната съставяща |S(0)| при честота f = 0.

Зад.2.3д Определете и начертайте качествено модула на спектъра |S(ω)| на единичен експоненциален импулс, описван математически със зависимостта $U(t)=\begin{cases}-U_0\exp(\alpha t), & t<0\\ 0, & t>0\end{cases}.$

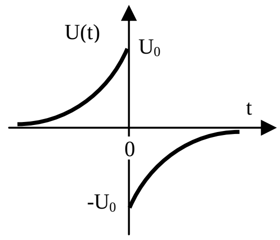


Определете стойността на спектралната съставяща |S(0)| при честота f = 0.



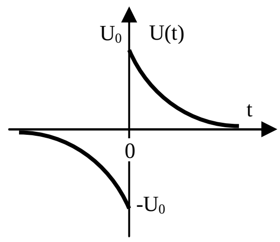
Зад.2.3е Определете и начертайте качествено модула на спектъра |S(ω)| на единичен експоненциален импулс, описван математически със зависимостта $U(t)=\begin{cases}U_0\exp(-\alpha t), & t>0\\ 0, & t<0\end{cases}.$

Определете стойността на спектралната съставяща |S(0)| при честота f = 0.



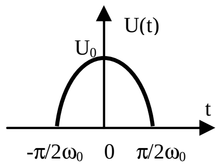
Зад2.3ж Определете и начертайте качествено модула на спектъра |S(ω)| на двоен експоненциален импулс, описван математически със зависимостта $U(t)=\begin{cases}U_0\exp(\alpha t), & t<0\\ -U_0\exp(-\alpha t), & t>0\end{cases}.$

Определете стойността на спектралната съставяща |S(0)| при честота f = 0.



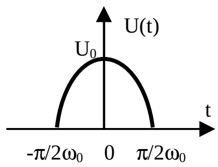
Зад.2.3з Определете и начертайте качествено модула на спектъра |S(ω)| на двоен експоненциален импулс, описван математически със зависимостта $U(t)=\begin{cases}-U_0\exp(\alpha t), & t<0\\ U_0\exp(-\alpha t), & t>0\end{cases}.$

Определете стойността на спектралната съставяща |S(0)| при честота f = 0.



Зад.2.4а Определете и начертайте качествено спектъра |S(ω)| на единичния косинуидален импулс, описван математически със зависимостта $U(t)=\begin{cases}U_0\cos(\omega_0 t), & t\in(-\pi/2\omega_0,\pi/2\omega_0)\\ 0, & \text{другаде}\end{cases}$

Определете стойността на спектралната съставяща |S(0)| при честота $f = 0$.



Зад.2.4б Определете и начертайте качествено спектъра |S(ω)| на единичния косинуидален импулс, описван математически със зависимостта $U(t)=\begin{cases}U_0\cos(\omega_0 t), & t\in(-\pi/2\omega_0,\pi/2\omega_0)\\ 0, & \text{другаде}\end{cases}$

Определете стойността на спектралната съставяща |S(0)| при честота $f = 0$.