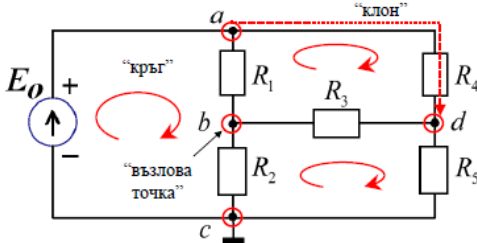


1. Закони на Кирхоф и методи за анализ на поостояннотокови вериги

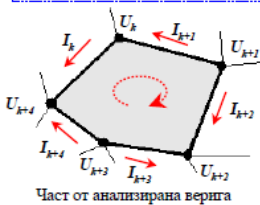
Понятия в сложни електрически вериги



При изобразяване на сложни електрически вериги се срещат следните понятия:

- "Клон" (branch) – част от ел. верига, в която тече един и същи ток  $I_i$  (ток между 2 възлови точки) с определена посока;
- "Възел (възлова точка, node)" – точка на свързване на 3 и повече клона, която има свой потенциал  $\phi_i$ . Потенциалът само в 1 възел може условно да се приеме за "нулев" ("заземяване") и тогава за останалите възлови точки се дефинира възлово напрежение  $U_j$ ;
- "Токъв кръг (контур, loop)" – съвкупност от клонове, образувачи затворена верига, която има начало и край в една и съща възлова точка. За всеки кръг може да се дефинира кръгов ток  $I_k$ ; това не е фактическият ток/токове в клоновете на кръга, но всеки ток в даден клон може да се определи от кръговия ток при анализа на схемата (вж. по-нататък).

Какво е анализ на електрическа верига?



Да се проведе анализ на дадена електрическа верига (схема) означава да се определят токовете във всеки клон или напреженията във всяка възлова точка. Това е пълен анализ, но той не винаги е необходим. Много по-често се налага да се проведе частичен анализ – само на определени важни части на схемата. Най-често се налага анализ на входа изхода на веригата – коефициенти на предаване по ток и напрежение.

Можем да класифицираме следните случаи на анализ на вериги по различни признаци:

- **Постояннотоков и променливотоков анализ.** Първият се извършва за схеми с  $dc$  сигнали ( $f=0$ ), а вторият – за схеми с  $ac$  ( $RF$ ) сигнали ( $f \neq 0$ ). Важно е да се отбележи, че двата типа анализ могат да се извършват поотделно и независимо един от друг за една и съща схема, но трябва да се съобразяват известни правила да няма взаимодействие между постояннотоковия и променливотоковия режими.
- **Линейен и нелинейен анализ.** Първият се извършва за схеми само с линейни елементи и в линейен режим на сигналите (за слаби сигнали), а вторият – при силен сигнал
- **Аналитичен и числен (симулационен) анализ.** Първият се извършва чрез аналитични методи по установени закони и теореми (използва се в настоящия курс), а вторият – чрез числени методи и с помощта на схемни моделни симулатори на вериги (вж. надолу)

Закони на Кирхоф в сложни вериги

Нека да разгледаме сложна електрическа верига с  $p$  клона,  $q$  възела и  $r$  кръга (контура). Неизвестни са токовете  $I_k$  в отделните клонове ( $p$  на брой). Връзката между тези токове и останалите известни параметри във веригата (ЕДН и съпротивления) се дава със законите на Кирхоф за постояннотокови вериги.

• **I закон:** алгебричната сума на токовете в дадена възлова точка е равна на нула ("+" за излизачи и "-" за влизачи токове).  $\sum_k I_{jk} = 0; \forall j = 1 + q$

• **II закон:** за всеки токов кръг (контур) алгебричната сума на ЕДН на източниците е равна на алгебричната сума на падовете на напреженията (съгласно приетите правила за знаците).

$$\sum_k E_{ik} = \sum_k U_{ik} = \sum_k I_{ik} R_{ik}; \quad \forall i = 1 + r$$

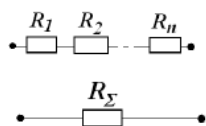
Законите на Кирхоф се използват при анализа на сложни вериги по следния начин:

Броят на неизвестните токове е  $p$ . Броят на уравненията, получени от I тип закони на Кирхоф, са  $q$ , но линейно-независими са  $q - 1 < p$ . От II тип закони на Кирхоф, се получават още  $r$  уравнения, но не всички са линейно-независими. Така от общо  $(q + r)$  се отделят  $p$  линейно-независими уравнения за  $p$  неизвестни тока. Следователно, задачата за анализ на сложни схеми е решима.

Примери за използване на законите на Кирхоф (2)

2. Вторият пример е за определяне на формули за последователно (сериен) и успоредно (паралелно) свързване на различни пасивни елементи: съпротивления, кондензатори и bobini.

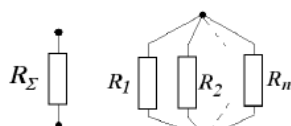
Последователно свързване



$$R_{\Sigma} = \sum_i^n R_i \quad L_{\Sigma} = \sum_i^n L_i$$

$$\frac{1}{C_{\Sigma}} = \sum_i^n \frac{1}{C_i}$$

Успоредно свързване



$$\frac{1}{R_{\Sigma}} = \sum_i^n \frac{1}{R_i} \quad \frac{1}{L_{\Sigma}} = \sum_i^n \frac{1}{L_i}$$

$$C_{\Sigma} = \sum_i^n C_i$$

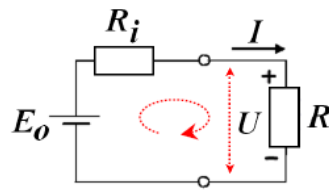
Правила за знаците на dc токовете и напреженията

Токвете  $I$  и напреженията (на източниците  $E$  (ЕДН) и падовете на напрежение върху съпротивленията  $U = IR$ ) имат свои знаци. За да е верен анализът на веригите, трябва да се спазват определени правила за знаците на токовете и напреженията. Предложениите тук правила са условни и важат с правилата за анализ, разгледани в лекцията.



- Правила за знаците на токовете във възлите: излизачите (изтичащите се) от възела токове – със знак "+", влизачите (втичащите се) към възела токове – със знак "-".
- Посока на обикаляне в контур: може да бъде по посока на часовниковата стрелка или обратно, но не трябва да се сменя по време на анализа.
- Правила за знаците на ЕДН на източниците: ЕДН се взема с положителен знак, ако посоката на напрежението или тока на генератора на напрежение или ток съвпада с посоката на обикаляне в контура. Напрежението се определя спрямо точката "земя".
- Правила за знаците на падовете на напрежение: падът на напрежение е с положителен знак, ако при обикалянето по контура най-напред се среща + полюс на елемента.

Връзка между параметрите в прости вериги



Най-простата електрическа верига се състои от един клон и един кръг и няма възлови точки (вж. примера горе). Връзката между тока  $I$  и напреженията – на източника  $E_i$  и пада на напрежение върху съпротивлението  $U = IR$  се дава със закона на Ом за цялата верига.

$$E_0 = I(R + R_i) = IR + IR_i = \sum_i U_i$$

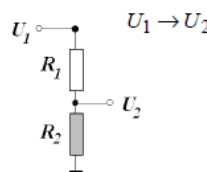
$$E_0 = IR = U \quad |_{R_i=0}$$

Може да се заключи, че ЕДН на източника е равно на сумата от падовете върху двете съпротивления (на консуматора и вътрешното съпротивление на източника) (вж. общият закон по-нататък). В частния случай на идеален източник връзката е най-проста.

Примери за използване на законите на Кирхоф (1)

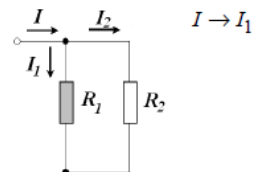
Ще дадем примери за прилагане на законите на Кирхоф в три относително прости случая. 1. Първият пример се отнася до делителите на напрежение и ток.

Делител на напрежение



$$U_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} U_1 = \frac{1}{1 + R_1 / R_2} U_1$$

Делител на ток



$$I = I_1 + I_2 \quad I_1 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} I = \frac{1}{1 + R_1 / R_2} I$$

Основни методи за анализ на сложни електрически вериги: Метод на Кирхоф

• **Метод на Кирхоф:** Това е метод, базиращ се на директно прилагане на законите на Кирхоф. Неизвестни са токовете в отделните клонове  $I_k$ . Броят на неизвестните е  $p$  и с общо  $q - 1$  линейно-независими уравнения на Кирхоф от I тип, допълнени с  $p - q + 1 < r$  линейно-независими уравнения на Кирхоф от II тип, се получават необходимите  $p$  линейно-независими уравнения за  $p$  неизвестни тока. Така се формира система от  $p$  линейни алгебрични хомогенни уравнения за токовете със ненулеви свободни членове. Решенията на тези уравнения се получават по правилото на Крамер:

$$I_j = \frac{\Delta_j}{\Delta}$$

където  $\Delta$  е детерминантата от ранг  $p$  на матрицата на коефициентите пред неизвестните токове, а  $\Delta_j$  е  $n$  тар адюнгирано количество – детерминантата от ранг  $p$  на матрицата на коефициентите пред неизвестните токове, чийто  $j$  стълб е заменен със стълба на свободните членове.

Това е най-директният метод, но с най-голям брой неизвестни и с най-голям брой алгебрични пресмятания –  $p$  на брой.

Вж. решеният пример по-нататък.

### Метод на кръговите токове

❖ **Метод на кръговите токове (метод на Максвел)**: Това е много популярен метод, базиран се на нов тип уравнения, изведени от уравненията на Кирхоф. Тук се въвеждат и нов тип неизвестни – кръгови токове  $F_j$  във всеки токов контур ( $\forall j = 1+r$ ). Техният брой е по-малък от предишния случай:  $r-1 < p$ . Прилагат се следния тип уравнения:

$$\sum_k E_{jk} = I_j^c \left( \sum_k R_{jk} \right) + \sum_n R_{jn} I_n^c, \quad \forall j = 1+r$$

Във формулата алгебричното сумиране по  $k$  се извършва за всички ЕДН и всички налични съпротивления в дадения токов контур  $j$ . Знаците на ЕДН  $E_{jk}$  се избират в зависимост от посоката на обикаляне в контура  $j$  (т. е. спрямо посоката на тока  $F_j$ ).

Алгебричното сумиране по  $n$  се извършва за всички съседни контури на токовия контур  $j$ . Следователно, в тази сума влизат само т. нар. взаимни съпротивления  $R_{jn}$ , т. е. съпротивленията в общите клонове на дадения контур  $j$  и съседния му контур  $n$ . Знакът на съседния кръгов ток  $F_n$  се избира в зависимост от знака на основния кръгов ток  $F_j$  – ако са в една посока “+”, ако са в различни посоки “-”.

Получената система уравнения е с по-нисък ранг ( $r-1$ ) и аналитично се решава по-лесно. Прилага се същата техника, както при метода на Кирхоф – правилото на Крамер, но този път за неизвестните кръгови токове.

Неизвестните токове в отделните клонове могат да се получат от вече определените кръгови токове – вж. решеният пример по-нататък.

### Други методи

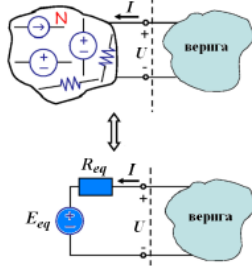
❖ **Метод на суперпозицията**: Това е известен физичен метод и се основава на възможността за сумиране на отделните линейни въздействия на всеки източник (при слаби сигнали). Може да се използва както аналитично, така и експериментално и е много удобен, когато се търси отделен ток само в един клон на веригата, без да се решават останалите.

**Принцип**: Токът във всеки  $j$ -ти клон  $I_j$  от дадена верига е алгебрична сума от токовете  $I_{jk}$ , създадени в същия клон под действието на всеки отделен източник във схемата, като се изключат останалите, т. е. когато изходните им клемми се свържат “накъсо”.

$$I_j = \sum_{k=1}^N I_{jk}$$

❖ **Метод на еквивалентните схеми**: Този метод ще бъде разгледан отделно в лекцията.

**Принцип**: Част от дадена сложна електрическа верига може да се замени с електрически еквивалентна на нея проста верига, представена чрез еквивалентно напрежение  $U_{eq}$  (или ток  $I_{eq}$ ) и еквивалентно съпротивление  $R_{eq}$  (вж. фигурата). При този принцип заместващата част от схемата остава “черна кутия” с неизвестна конкретна схема, но с известни общи параметри – еквивалентно напрежение/ток и съпротивление. Така може да се анализира останалата част от веригата при същите токове и напрежения.



### Метод на възловите напрежения

❖ **Метод на възловите напрежения**: Това е удобен метод, защото се работи с напрежения във възловите точки и аналитичното решение лесно може да се провери експериментално чрез измервания с волтметър, без да се прекъсва веригата. Този метод също се базира на нов тип уравнения, изведени от уравненията на Кирхоф. Тук неизвестните величини са възловите напрежения  $U^*$  във всяка възлова точка ( $\forall l = 1+q$ ). Големо удобство е фактът, че за една точка (но само за 1) потенциалът се избира нулев (“заземване”), с което броят на неизвестните се редуцира до минимален:  $q-1 < p$ . Прилагат се следния тип уравнения:

$$\sum_k \frac{1}{R_{lk}} E_{lk} = U_l^* \left( \sum_k \frac{1}{R_{lk}} \right) - \sum_n \frac{1}{R_{ln}} U_n^*, \quad \forall l = 1+q-1$$

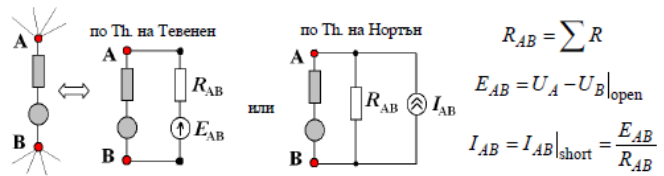
Във формулата алгебричното сумиране по  $k$  се извършва за всички ЕДН и всички налични проводимости ( $1/R_{lk}$ ) в клоновете, които имат обща точка във възела  $l$ . Знаците на ЕДН  $E_{lk}$  се избират в зависимост от близостта на даден полюс до възела, т. е. “+” за близост на положителния полюс и “-” за обратното. Тук има един проблем, ако източникът е идеален и в дадения клон няма включено съпротивление (т. е.  $E_{lk}/R_{lk} \rightarrow \infty$ ). Тогава се поставя така: добавя се крайно вътрешно съпротивление на източника  $R_i \neq 0$  и затова отношението  $E_{lk}/R_i \neq \infty$ ; веригата се анализира аналитично с това съпротивление  $R_i \neq 0$  и накрая в полученния израз се прави прехода  $R_i \rightarrow 0$ ; задачата обикновено има решение.

Алгебричното сумиране по  $n$  се извършва за всички съседни възли на възела  $l$ . Така в тази сума влизат само т. нар. взаимни проводимости  $1/R_{ln}$ , т. е. отчитат се само съпротивленията в общите клонове между двете възлови точки  $l$  и  $n$ . Неизвестните токове в отделните клонове могат да се получат от вече определените напрежения – вж. решеният пример.

### Метод на еквивалентните схеми с генератори на напрежение и ток

Това е един от най-често използваните методи за опростен анализ на вериги, когато се интересуваме само от част от по-сложна верига. Пример е показан долу. Нека да търсим решение за параметрите (ток, напрежение) в клона АВ, а останалата част на веригата не ни интересува. Тогава можем да заменим тази част, която не ни интересува, с еквивалентен генератор на напрежение или ток, като използваме теоремата на Тевенен (или Нортън): **Th, Thévenin/Norton**: Всяка част от дадена сложна електрическа верига по отношение на друга нейна част (дори само един нейн клон), свързани в т. А и В, може да се замени с проста схема с генератор на напрежение  $E_{AB}$  (Thévenin) или генератор на ток  $I_{AB}$  (Norton) с вътрешно съпротивление  $R_{AB}$ . Когато кой генератор да се използва се определя от удобство в конкретната схема.

Тук  $R_{AB}$  е **еквивалентното съпротивление** на заместващата част от веригата, в която всички източници са дадени “накъсо”. ЕДН на генератора на напрежение  $E_{AB}$  и напрежението на “празен ход” (отвор) между т. А и В, когато интересуващият ни клон АВ отсъства (веригата му е прекъсната). Токът  $I_{AB}$  и токът на “късо съединение” (short) между т. А и В, при условие, че клоновете АВ, който ни интересува, в даден “накъсо” в схемата между А и В.



### Задачи за методи за анализ на постояннотокови вериги:

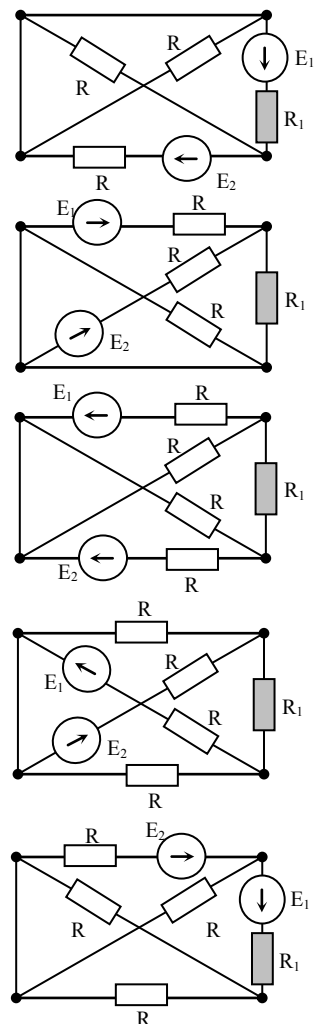
Зад. 1.1 Определете тока  $I_{R1}$  през съпротивлението  $R_1$  на дадената схема. (Указание: За определяне на неизвестния ток използвайте първо метода на заместване с еквивалентна схема на основата на теоремата на Тевенен. След това използвайте някой от известните ви методи за анализ на заместващата част от схемата, за да определите нейните параметри).

Зад. 1.2 Определете тока  $I_{R1}$  през съпротивлението  $R_1$  на дадената схема. (Указание: За определяне на неизвестния ток използвайте първо метода на заместване с еквивалентна схема на основата на теоремата на Тевенен. След това използвайте някой от известните ви методи за анализ на заместващата част от схемата, за да определите нейните параметри).

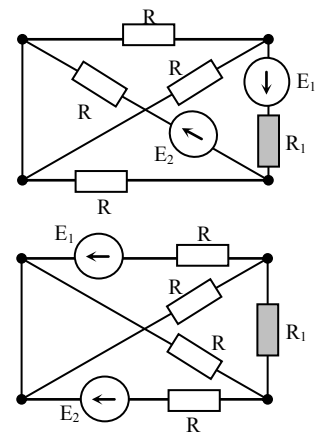
Зад. 1.3 Определете тока  $I_{R1}$  през съпротивлението  $R_1$  на дадената схема. (Указание: За определяне на неизвестния ток използвайте първо метода на заместване с еквивалентна схема на основата на теоремата на Тевенен. След това използвайте някой от известните ви методи за анализ на заместващата част от схемата, за да определите нейните параметри).

Зад. 1.4 Определете тока  $I_{R1}$  през съпротивлението  $R_1$  на дадената схема. (Указание: За определяне на неизвестния ток използвайте първо метода на заместване с еквивалентна схема на основата на теоремата на Тевенен. След това използвайте някой от известните ви методи за анализ на заместващата част от схемата, за да определите нейните параметри).

Зад. 1.5 Определете тока  $I_{R1}$  през съпротивлението  $R_1$  на дадената схема. (Указание: За определяне на неизвестния ток използвайте първо метода на заместване с еквивалентна схема на основата на теоремата на Тевенен. След това използвайте някой от известните ви методи за анализ на заместващата част от схемата, за да определите нейните параметри).



Зад. 1.6 Определете тока  $I_{R1}$  през съпротивлението  $R_1$  на дадената схема. (Указание: За определяне на неизвестния ток използвайте първо метода на заместване с еквивалентна схема на основата на теоремата на Тевенен. След това използвайте някой от известните ви методи за анализ на заместващата част от схемата, за да определите нейните параметри).



Зад. 1.7 Определете тока  $I_{R1}$  през съпротивлението  $R_1$  на дадената схема. (Указание: За определяне на неизвестния ток използвайте първо метода на заместване с еквивалентна схема на основата на теоремата на Тевенен. След това използвайте някой от известните ви методи за анализ на заместващата част от схемата, за да определите нейните параметри).

## 2. Комплексен метод за анализ на променливотокови вериги в установен режим

### Закони на Кирхоф в диференциална форма

Вече показваме, че законите на Кирхоф могат да се обобщят и за сложни променливотокови вериги в диференциална форма.



❖ I закон:  $\sum_k i_k = 0$

❖ II закон:  $\sum_k e_k = \sum_k \left[ L_k \frac{di_k}{dt} + R_k i_k + \frac{1}{C_k} \int i_k dt \right]$

Вторият тип закони на Кирхоф сега са комплексни интегро-диференциални уравнения за променливите токове  $i_k$ . Със замяна  $i_k \rightarrow i_k^*$  и ако  $R_k, C_k$  и  $L_k$  не зависят от времето, законите на Кирхоф се получават лесно решими диференциални уравнения от 2 ред за токовете.

$$i_k^* \Rightarrow \int i_k dt \quad \sum_k e_k = \sum_k \left[ L_k \frac{d^2 i_k^*}{dt^2} + R_k \frac{di_k^*}{dt} + \frac{1}{C_k} i_k^* \right]$$

### Основна идея на комплексния метод

Като се имат в предвид казаното дотук, за да се анализира една сложна променливотокова верига в установен или преходен режим трябва да се намерят общото и поне едно частно решение на системата диференциални уравнения. Тези решения са синусоидални или косинусоидални функции и комбинация от тях. Така напр. чрез Фурие преобразуванията могат да се намерят решенията за дадена схема. Това, обаче е сложно и трудноемо.

Идея на комплексния (символичния) метод:

За да се избегнат математическите затруднения, вместо с реалните токове и напрежения се въвеждат "символични" токове и напрежения, представени с комплексни числа. След математически преобразувания върху комплексните функции, продукувани от условията на задачата, се получава комплексен резултат, от който обратно се "извличат" реалните токове и напрежения - вече като решения на анализа.

$$\begin{aligned} i(t) &\Rightarrow \dot{I}(t) & \dot{I}(t) &= I_m [\cos(\omega t + \varphi_i) + j \sin(\omega t + \varphi_i)] = I_m e^{j(\omega t + \varphi_i)} \\ u(t) &\Rightarrow \dot{U}(t) & \dot{U}(t) &= U_m [\cos(\omega t + \varphi_u) + j \sin(\omega t + \varphi_u)] = U_m e^{j(\omega t + \varphi_u)} \end{aligned}$$

Важна е връзката, която ще установим между реалния ток/напрежение (в реалната схема) и комплексния ток/напрежение. Дотук са представени три варианта за косинусоидален или синусоидален ток:

$$i(t) = \frac{1}{2} [I_m e^{j(\omega t + \varphi_i)} \pm I_m^* e^{-j(\omega t + \varphi_i)}]$$

$$i(t) = \text{Re } \dot{I}(t) \rightarrow i(t) \sim \cos(\omega t) \quad \text{или} \quad i(t) = \text{Im } \dot{I}(t) \rightarrow i(t) \sim \sin(\omega t)$$

### Комплексен импеданс

При комплексния метод се въвежда специално понятие - комплексно съпротивление (импеданс) на отделните елементи, включени във веригата и на целия клон от веригата в общия случай  $Z$ . Зависимостта му стойност  $Y = 1/Z$  е известна като комплексна проводимост или адмитанс.

$$\begin{aligned} \text{---} \square \text{---} & \quad \text{---} \parallel \text{---} & \text{---} \text{---} \text{---} \\ R & \quad C & L \\ Z_R = R & \quad Z_C = \frac{1}{j\omega C} = -j \frac{1}{\omega C} & Z_L = j\omega L \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{---} \text{---} \square \text{---} & \quad \left| \begin{aligned} Z &= R + jX = R + j \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \\ Y &= \frac{1}{Z} = G + jB \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

Има един съществен въпрос: след като комплексното съпротивление при комплексния метод е  $Z$ , кое е реалното съпротивление, което го представлява във веригата? (т.е. ако  $i \rightarrow \text{Re } i$ , дали  $R \rightarrow \text{Re } Z$ , или нещо друго. Отговорът е модулът на импеданса  $|Z|$  - вж. формулата вдясно.

$$|Z| = \sqrt{R^2 + \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}$$

### Математически проблеми

Това, че уравненията на Кирхоф са интегро-диференциални или диференциални уравнения за променливите токове  $i_k$  е сериозен математически проблем. Как може да се реши?

Нека броят на неизвестните променливи токове в отделни клонове на веригата е  $n$ . Както и в случая на постояннотокови вериги, от уравненията от I тип се отделят  $(q-1)$  линейно-независими уравнения ( $q$ - брой на възлите) и се добавят още  $(p-q+1)$  от уравненията от II тип. Така се получава система от  $n$  независими линейни диференциални уравнения от 2 ред за тока и неговите първа и втора производни. Известно е, че математически системата може се представи с едно обикновено диференциално уравнение от  $2n$ -ти ред

$$A_{2n} \frac{d^{2n} i_k}{dt^{2n}} + A_{2n-1} \frac{d^{2n-1} i_k}{dt^{2n-1}} + \dots + A_2 \frac{d^2 i_k}{dt^2} + A_1 \frac{di_k}{dt} + A_0 i_k = f_k(t)$$

Тук  $i_k$  е един неизвестен ток, чрез който могат да се изразят останалите;  $A_k$  ( $k=1+2n$ ) са постоянни коефициенти пред различните производни на тока  $i_k$ , а  $f(t)$  е свободния член - функция на времето на ЕДН на източниците.

Решения:

1) при  $f(t) = 0$  (хомогенно уравнение). Това е случая на свободни токове и преходни процеси във веригата (свободни трептения). Решението за  $i_k$  е т. нар. общо решение  $i_0$  на диференциалното уравнение.  $f(t) = 0 \Rightarrow i_k = i_0$

2) при  $f(t) \neq 0$  (нехомогенно уравнение). Това е случая на  $f(t) \neq 0 \Rightarrow i_k = i_0 + i_p$  принудени (установени) трептения. Решението за  $i_k$  е сума от общото решение  $i_0$  и едно частно решение  $i_p$ .

### Закони на Кирхоф в комплексна форма

Нека комплексните токове в променливо-токовата схема се описват във вида:  $\dot{I}_k = I_{m,k} e^{j\omega t}$

Тогава:

❖ I закон:  $\sum_k \dot{I}_k = 0$

❖ II закон:  $\sum_k \dot{E}_k = \sum_k \left[ L_k j\omega \dot{I}_k + R_k \dot{I}_k + \frac{1}{j\omega C_k} \dot{I}_k \right]$

$$\sum_k \dot{E}_k = \sum_k \dot{I}_k \left[ R_k + j\omega L_k + \frac{1}{j\omega C_k} \right] = \sum_k \dot{I}_k \left[ R_k + j \left( \omega L_k - \frac{1}{\omega C_k} \right) \right]$$

Окончателният вид на законите на Кирхоф в комплексна форма са представени по-долу. Така те много приличат на формата на уравненията, които имат за постояннотокови вериги. Следователно, и сега могат да се прилагат всички разглеждани досега методи за анализ на вериги. Разликата сега е в новата форма на комплексното съпротивление - импеданс  $Z$  на елементите в отделните клонове (вж. следващата страница).

❖ I закон:  $\sum_k \dot{I}_k = 0$       ❖ II закон:  $\sum_k \dot{E}_k = \sum_k \dot{I}_k Z_k$

### Енергетични характеристики в променливотокови вериги

Важен е и друг въпрос при прилагане на комплексния метод - как се изразява мощността на променливотоковия сигнал? Мощността в консуматорите  $P(t)$  е реална величина:

$$P(t) = u(t)i(t)$$

Тогава въпросът е как да се свърже с комплексните токове, напрежения и съпротивления? Дотук е показано това за усреднената за един период мощност:

$$\overline{P(t)} = \frac{1}{4} [\dot{U}^* e^{j(\omega t - \varphi_u + \varphi_i)} + \dot{U} e^{j(\omega t - \varphi_u - \varphi_i)} + \dot{U} e^{j(2\omega t + \varphi_u)} + \dot{U}^* e^{j(-2\omega t - \varphi_u)}]$$

Понеже  $\overline{e^{\pm(2j\omega t)}} \equiv 0 \Rightarrow \overline{P(t)} = \frac{1}{4} [\dot{U}^* e^{j\varphi} + \dot{U} e^{-j\varphi}] = \frac{1}{2} |\dot{U}| |\dot{I}| \cos \varphi$

Окончателно получаваме следният израз за средната мощност чрез модулите на комплексните токове и напрежения и чрез ефективните токове и напрежения и фазовата разлика  $\varphi$ :

$$\overline{P(t)} = \frac{1}{2} |\dot{U}| |\dot{I}| \cos \varphi = I_{\text{eff}} U_{\text{eff}} \cos \varphi$$

Други изрази (чрез импеданса):

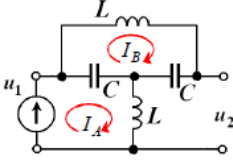
$$\overline{P(t)} = \frac{1}{2} |\dot{I}|^2 |Z| \cos \varphi = \frac{1}{2} \frac{|\dot{U}|^2}{|Z|} \cos \varphi$$

$$U_{\text{eff}} = \frac{|\dot{U}|}{\sqrt{2}}$$

$$I_{\text{eff}} = \frac{|\dot{I}|}{\sqrt{2}}$$

### Решен пример

Да се определи величината  $k_U = u_2 / u_1$  на дадената верига и да се построи честотната ѝ зависимост.



Решение: По комплексния метод, комбиниран с метода на кръговите токове. Въвеждаме комплексни кръгови токове и комплексни напрежения

$$i_{A,B}(t) = \text{Re } I_{A,B}(t) \quad u_{1,2}(t) = \text{Re } U_{1,2}(t)$$

Търсеното изходно напрежение  $U_2$  и  $K_U$  са

$$U_2 = U_1 - I_B j\omega L; \quad I_B = ?;$$

$$k_U = \text{Re } K_U = \text{Re}(U_2 / U_1)$$

Търсим тока  $I_B$  по метода на кръговите токове:

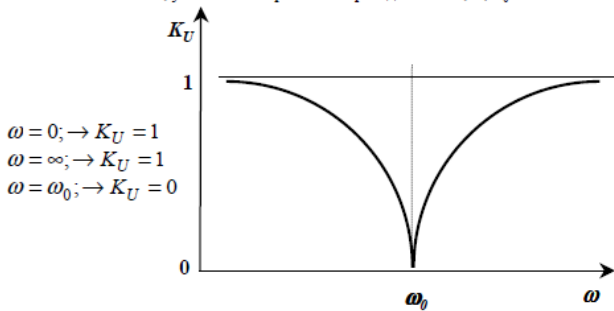
$$\begin{cases} U_1 = I_A \left( j\omega L + \frac{1}{j\omega C} \right) - I_B \frac{1}{j\omega C} \\ 0 = I_B \left( j\omega L + \frac{2}{j\omega C} \right) - I_A \frac{1}{j\omega C} \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} j\omega L + \frac{1}{j\omega C} & -\frac{1}{j\omega C} \\ -\frac{1}{j\omega C} & j\omega L + \frac{2}{j\omega C} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

### Решен пример (прод.)

Въвеждаме означение:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \Rightarrow k_U = \text{Re } K_U = 1 - \frac{1}{3 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}} = 1 - \frac{\omega^2 \omega_0^2}{3\omega^2 \omega_0^2 - \omega^4 - \omega_0^4}$$

Можем да начертаяме качествено зависимостта  $K_U(\omega) = U_2 / U_1$ , като я изследваме за някои типични стойности на  $\omega$ , установени с гранични преходи за  $\omega = 0, \infty, \omega_0$ .



### Решен пример (прод.)

Търсенят ток е

$$I_B = \frac{\begin{vmatrix} j\omega L + \frac{1}{j\omega C} & U_1 \\ -\frac{1}{j\omega C} & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} j\omega L + \frac{1}{j\omega C} & -\frac{1}{j\omega C} \\ -\frac{1}{j\omega C} & j\omega L + \frac{2}{j\omega C} \end{vmatrix}} = \frac{\frac{U_1}{j\omega C}}{\left( j\omega L + \frac{1}{j\omega C} \right) \left( j\omega L + \frac{2}{j\omega C} \right) - \frac{1}{\omega^2 C^2}} = \frac{U_1}{j\omega C} \cdot \frac{1}{\frac{3L}{C} - \omega^2 L^2 - \frac{1}{\omega^2 C^2}}$$

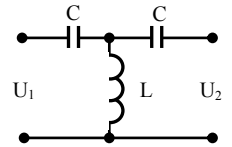
$\Rightarrow$

$$U_2 = U_1 \left( 1 - \frac{L/C}{\frac{3L}{C} - \omega^2 L^2 - \frac{1}{\omega^2 C^2}} \right) = U_1 \left( 1 - \frac{1}{3 - \omega^2 LC - \frac{1}{\omega^2 LC}} \right)$$

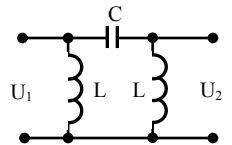
## Още задачи за променливотокови вериги в установен режим:

### Задачи с понижена сложност:

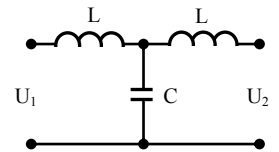
Зад. 2.1 Определете модула на коефициента на предаване по напрежение  $|K_U|$  на дадения четириполосник. Определете честотата  $\omega_c$ , при която  $|K_U| = 0.707|K_{U\max}|$  (величината  $|K_{U\max}|$  е максималният коефициент на предаване по напрежение четириполосника). (Указание: входното напрежение във веригата на четириполосника се разглежда като източник на напрежение с нулево вътрешно съпротивление, а изходната верига е в режим на "празен ход". При тези условия прещенете къде във веригата тече ток и къде – не).



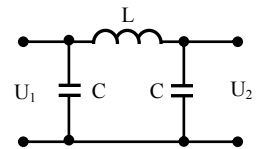
Зад. 2.2 Определете модула на коефициента на предаване по напрежение  $|K_U|$  на дадения четириполосник. Определете честотата  $\omega_c$ , при която  $|K_U| = 0.707|K_{U\max}|$  (величината  $|K_{U\max}|$  е максималният коефициент на предаване по напрежение четириполосника). (Указание: входното напрежение във веригата на четириполосника се разглежда като източник на напрежение с нулево вътрешно съпротивление, а изходната верига е в режим на "празен ход". При тези условия прещенете къде във веригата тече ток и къде – не).



Зад. 2.3 Определете модула на коефициента на предаване по напрежение  $|K_U|$  на дадения четириполосник. Определете честотата  $\omega_c$ , при която  $|K_U| = 0.707|K_{U\max}|$  (величината  $|K_{U\max}|$  е максималният коефициент на предаване по напрежение четириполосника). (Указание: входното напрежение във веригата на четириполосника се разглежда като източник на напрежение с нулево вътрешно съпротивление, а изходната верига е в режим на "празен ход". При тези условия прещенете къде във веригата тече ток и къде – не).

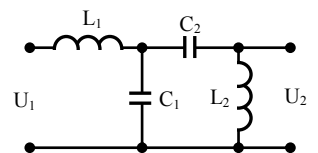


Зад. 2.4 Определете модула на коефициента на предаване по напрежение  $|K_U|$  на дадения четириполосник. Определете честотата  $\omega_c$ , при която  $|K_U| = 0.707|K_{U\max}|$  (величината  $|K_{U\max}|$  е максималният коефициент на предаване по напрежение четириполосника). (Указание: входното напрежение във веригата на четириполосника се разглежда като източник на напрежение с нулево вътрешно съпротивление, а изходната верига е в режим на "празен ход". При тези условия прещенете къде във веригата тече ток и къде – не).

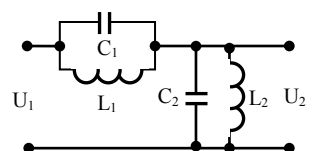


### Задачи с нормална сложност

Зад. 2.5 На фигурата е изобразена схема на филтър. Определете модула на коефициента на предаване по напрежение  $|K_U|$  на филтъра и критичните честоти  $\omega_{c1}$  и  $\omega_{c2}$ , при които  $|K_U| = 0.707|K_{U\max}|$  (величината  $|K_{U\max}|$  е максималният коефициент на предаване по напрежение без товар на изхода). Какъв е типа на филтъра, ако  $L_2 C_2 > L_1 C_1$ ? (Указание: Вижте от кои две отделни LC вериги се състои филтърът и определете тяхното действие за сигнали с различни честоти).



Зад. 2.6 На фигурата е изобразена схема на филтър. Определете модула на коефициента на предаване по напрежение  $|K_U|$  на филтъра и критичните честоти  $\omega_{c1}$  и  $\omega_{c2}$ , при които  $|K_U| = 0.707|K_{U\max}|$  (величината  $|K_{U\max}|$  е максималният коефициент на предаване по напрежение без товар на изхода). Какъв е типа на филтъра, ако  $L_2 C_1 > L_1 C_2$ ? (Указание: Вижте от кои две отделни LC вериги се състои филтърът и определете тяхното действие за сигнали с различни честоти).





### 3. Операторен метод за анализ на променливотокови вериги в преходен режим

#### Операторен метод

Комплексният (символичният) метод може да се използва само в променливотокови електронни вериги в установен режим (принудени трептения). В преходни режими този метод е неприложим. В тези случаи може да се използва по-общ метод – т. нар. операторен метод (или метод на Лаплас).

Основа на операторния метод:

На всяка функция на времето  $f(t)$  (функция-оригинал) (това е ток, напрежение или др. величина) се съпоставя комплексна функция  $F(p)$  (функция-образ), дефинирана в комплексната равнина  $p = \alpha + j\omega$  съгласно т. нар. преобразуване на Лаплас

$$\left\{ \begin{array}{l} F(p) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt \quad p = \alpha + j\omega \quad \text{право преобразуване} \quad F(p) \leftrightarrow f(t) \\ f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{p^* = \alpha - j\omega}^{p = \alpha + j\omega} F(p) e^{pt} dp \quad \text{обратно преобразуване} \quad f(t) \leftrightarrow F(p) \end{array} \right.$$

Важна е връзката, която ще установим между реалния ток/напрежение (в реалната схема) и комплексния ток/напрежение. Долу са представени три варианта за косинусоиден или синусоиден ток:

#### Идея на операторния метод при анализ на вериги

Подобно на комплексния метод, и при операторния метод за анализ на сложни променливотокови вериги на реалните токове и напрежения (функции-оригинали) се въвеждат "операторни" токове и напрежения (функции-образи) на основата на правото преобразуване на Лаплас. След математически преобразувания върху операторните функции, свързани с конкретната задача, се получават операторни решения, от които обратно се "извличат" реалните токове и напрежения на основата на обратното преобразуване на Лаплас. Така величината  $p = \alpha + j\omega$  има смисъл на комплексна честота ( $\omega$  – кръгова честота,  $\alpha$  – затихване/усилване във времето).

При тези условия уравненията на Кирхоф от II тип могат да се преобразуват по следния начин

$$i(t) \leftrightarrow I(p) \quad u(t) \leftrightarrow U(p) \quad \sum_k E_k(p) = \sum_k \left[ pL_k I_k(p) + R_k I_k(p) + \frac{1}{pC_k} I_k(p) \right]$$

Уравнения на Кирхоф в операторен вид: Сега се въвежда операторно съпротивление  $Z(p)$  (импеданс) и операторна проводимост  $Y(p)$  (адмитанс)

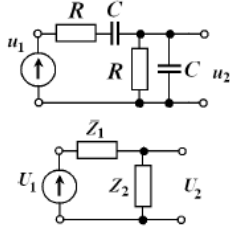
♦ I закон:  $\sum_k I_k(p) = 0$

♦ II закон:  $\sum_k E_k(p) = \sum_k I_k(p) Z_k(p)$

$$Z(p) = R + pL + \frac{1}{pC} \quad Y(p) = \frac{1}{Z(p)}$$

#### Решен пример за преходен процес

Да се определи величината  $K_U = u_2/u_1$  на дадената верига, когато  $u_1$  търпи скок  $u_1 = U_0$  при  $t = 0$ , да се начертае зависимостта  $u_2(t)$  и да се определи в кой момент има екстремум.



Решение: Задачата трябва да се реши чрез операторния метод, понеже се касае за преходен (непериодичен) процес (скок на входното напрежение от 0 до  $U_0$  при  $t = 0$ ). Въвеждаме операторните напрежения  $U_1$  и  $U_2$  и операторните импеданси  $Z_1$  и  $Z_2$ . Тогава:

$$K_U(t) = \frac{U_2(p)}{U_1(p)} = \frac{Z_2(p)}{Z_1(p) + Z_2(p)} = \frac{1}{1 + \frac{Z_1}{Z_2}}$$

където

$$Z_1(p) = R + \frac{1}{pC} \quad \frac{1}{Z_2(p)} = pC + \frac{1}{R}$$

Преобразуваме израза:

$$K_U(p) = \frac{1}{1 + \left(R + \frac{1}{pC}\right) \left(pC + \frac{1}{R}\right)} = \frac{1}{1 + \frac{1 + 2pRC + p^2 R^2 C^2}{pRC}} = \frac{1}{3 + pRC + \frac{1}{pRC}}$$

#### Решен пример (прод.)

Понеже в табличните преходи при преобразуването на Лаплас

$$\frac{1}{p - p_{1,2}} \leftrightarrow e^{p_{1,2}t} \quad \Rightarrow \quad u_2(t) = U_0 \omega_0 \frac{1}{\omega_0 \sqrt{5}} \left[ e^{p_1 t} - e^{p_2 t} \right]$$

$$p_1 = -0.382\omega_0; \quad p_2 = -2.618\omega_0$$

Можем да начертаем качествено зависимостта  $u_2(t)$ , като я изследваме за екстремум. За целта ще определим производната на  $u_2(t)$  по  $t$  и ще я нулираме (забележка: от отрицателния знак на 2-рата производна се получава, че това е максимум)

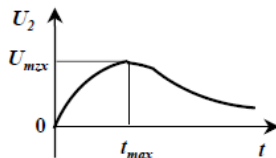
$$\frac{du_2(t)}{dt} = 0 \Big|_{t=t_{\max}} \quad \Rightarrow \quad p_1 e^{p_1 t} = p_2 e^{p_2 t} \quad \Rightarrow \quad \ln p_1 + p_1 t = \ln p_2 + p_2 t$$

Тогава:

$$t_{\max} = \frac{\ln(p_2/p_1)}{p_1 - p_2}$$

$$t_{\max} = \frac{\ln(2.618/0.382)}{2.618 - 0.382} / \omega_0 = 0.861 / \omega_0$$

$$t_{\max} = 0.861 RC$$



#### Основни математически операции при операторния метод

$$\begin{array}{ll} \sum f(t) \leftrightarrow \sum F(p) & \frac{d^{(n)} f(t)}{dt^n} \leftrightarrow p^n F(p) \\ af(t) \leftrightarrow aF(p) & (-1)^n t^n f(t) \leftrightarrow \frac{d^n F(p)}{dp^n} \\ f(at) \leftrightarrow \frac{1}{a} F\left(\frac{p}{a}\right) & \int f(t) dt \leftrightarrow \frac{1}{p} F(p) \\ f(t-\tau) \leftrightarrow F(p)e^{-p\tau} & \int f_1(t)f_2(t-\tau) dt \leftrightarrow F_1(p)F_2(p) \\ \frac{df(t)}{dt} \leftrightarrow pF(p) & \end{array}$$

#### Таблица на най-често срещаните в електрониката преходи на функции-оригинали и функции-образи

$$\begin{array}{ll} \delta(t) \leftrightarrow 1 & e^{\pm \alpha t} \leftrightarrow \frac{1}{p \mp \alpha} \\ A = \text{const} \leftrightarrow \frac{A}{p} & 1 - e^{\pm \alpha t} \leftrightarrow \frac{\alpha}{p(p \mp \alpha)} \\ t \leftrightarrow \frac{1}{p^2} & te^{-\alpha t} \leftrightarrow \frac{1}{(p - \alpha)^2} \\ t^n \leftrightarrow \frac{n!}{p^{n+1}} & e^{\pm \beta t} - e^{\pm \alpha t} \leftrightarrow \frac{\alpha - \beta}{(p \mp \beta)(p \mp \alpha)} \\ \sin \omega t \leftrightarrow \frac{\omega}{p^2 + \alpha^2} & \\ \cos \omega t \leftrightarrow \frac{p}{p^2 + \alpha^2} & \end{array}$$

#### Решен пример (прод.)

Пологаме  $\Rightarrow U_2(p) = U_1(p) \frac{pRC}{3pRC + 1 + p^2 R^2 C^2} = U_0 \frac{1}{RC} \frac{p/\omega_0}{3p/\omega_0 + 1 + p^2/\omega_0^2} = U_1(p) \frac{p/\omega_0}{3p/\omega_0 + 1 + p^2/\omega_0^2} = U_1(p) \frac{p\omega_0}{3p\omega_0 + \omega_0^2 + p^2}$

От прехода

$$u_1(t) = U_0 \Rightarrow U_1(p) = \frac{U_0}{p} \quad \Rightarrow \quad U_2(p) = \frac{\omega_0}{3p/\omega_0 + 1 + p^2/\omega_0^2}$$

За да се реши успешно задачата, трябва в знаменателя на зависимостта да се получат изрази от типа  $1/(p \pm \alpha)$  или подобни. В подобен случай трябва да се определят корените  $p_1, p_2$  на квадратното уравнение в знаменателя и да се използва формулата на Виет. Тогава

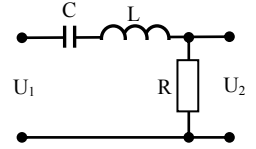
$$U_2(p) = \frac{\omega_0}{(p - p_1)(p - p_2)} U_0 \quad \text{където} \quad p_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2} \omega_0$$

$\Rightarrow$

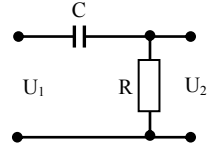
$$U_2(p) = U_0 \omega_0 \left[ \frac{A}{(p - p_1)} + \frac{B}{(p - p_2)} \right] = U_0 \omega_0 \frac{1}{p_1 - p_2} \left[ \frac{1}{(p - p_1)} - \frac{1}{(p - p_2)} \right]$$

## Още задачи за операторен метод за анализ на променливотокови вериги в преходен режим

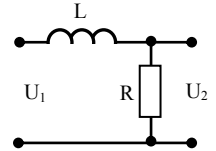
- Зад.3.1 Определете зависимостта от времето на изходното напрежение  $U_2(t)$  при протичане на преходен процес в показаната схема, когато на входа ѝ се подава постоянно напрежение  $U_1 = U_0$  ( $t > 0$ ). Начертайте качествено получената крива за  $U_2(t)$ . (Указание: Използвайте операторния метод за анализ на сложни вериги, като се опитате да представите израза за изходното операторно напрежение като сума от събираеми от вида  $C_i/(p \pm \alpha_i)$ ;  $p$  е операторната променлива. За целта използвайте формулата на Виет за полученото квадратно уравнение. За опростяване на изчисленията въведете означенията  $\omega_0^2 = 1/LC$  и  $\beta = R/L$ . Приемете, че  $\beta < 2\omega_0$ ).



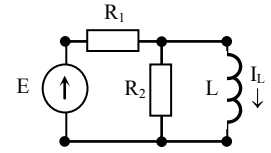
- Зад.3.2 Определете зависимостта от времето на изходното напрежение  $U_2(t)$  при протичане на преходен процес в показаната схема, когато на входа ѝ се подава линейно нарастващо напрежение  $U_1(t) = At$  ( $t > 0$ ). Начертайте качествено получената крива за  $U_2(t)$  и я сравнете с тази за  $U_1(t)$ . (Указание: използвайте операторния метод за анализ на сложни вериги).



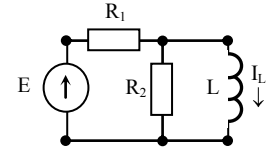
- Зад.3.3 Определете зависимостта от времето на изходното напрежение  $U_2(t)$  при протичане на преходен процес в показаната схема, когато на входа ѝ се подава линейно нарастващо напрежение  $U_1(t) = At$  ( $t > 0$ ). Начертайте качествено получената крива за  $U_2(t)$  и я сравнете с тази за  $U_1(t)$ . (Указание: използвайте операторния метод за анализ на сложни вериги).



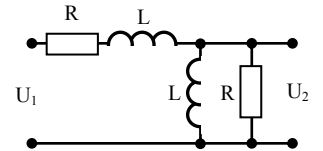
- Зад.3.4 Определете зависимостта от времето на тока  $I_L(t)$  през бобината  $L$  при протичане на преходен процес в показаната схема, когато напрежението на източника е  $E = U_0$  ( $t > 0$ ). (Указание: използвайте операторния метод за анализ на сложни вериги. За определяне на неизвестния ток използвайте метода на заместване с еквивалентна схема на основата на теоремата на Тевенен).



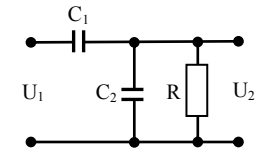
- Зад.3.5 Определете зависимостта от времето на тока  $I_L(t)$  през бобината  $L$  при протичане на преходен процес в показаната схема, когато напрежението на източника спада експоненциално  $E(t) = U_0 \exp(-\alpha t)$  ( $t > 0$ ). (Указание: използвайте операторния метод за анализ на сложни вериги. За определяне на неизвестния ток използвайте метода на заместване с еквивалентна схема на основата на теоремата на Тевенен).



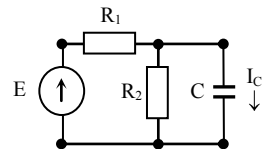
- Зад.3.6 Определете зависимостта от времето на изходното напрежение  $U_2(t)$  при протичане на преходен процес в показаната схема, когато на входа ѝ се подава постоянно напрежение  $U_1 = U_0$  ( $t > 0$ ). Начертайте качествено получената крива за  $U_2(t)$ . (Указание: Използвайте операторния метод за анализ на сложни вериги, като се опитате да представите израза за изходното операторно напрежение като сума от събираеми от вида  $C_i/(p \pm \alpha_i)$ ;  $p$  е операторната променлива. За целта използвайте формулата на Виет за полученото квадратно уравнение. За опростяване на изчисленията въведете и означението  $\beta = R/L$ ).



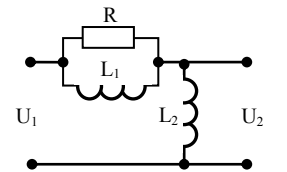
- Зад.3.7 Определете зависимостта от времето на изходното напрежение  $U_2(t)$  при протичане на преходен процес в показаната схема, когато на входа ѝ се подава експоненциално спадащо напрежение  $U_1(t) = U_0 \exp(-\alpha t)$  ( $t > 0$ ). (Указание: използвайте операторния метод за анализ на сложни вериги, като се опитате да представите израза за изходното операторно напрежение като сума от събираеми от вида  $C_i/(p \pm \alpha_i)$ ;  $p$  е операторната променлива).



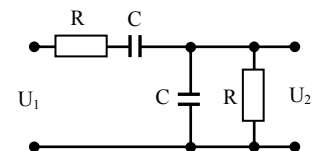
- Зад.3.8 Определете зависимостта от времето на тока  $I_C(t)$  през кондензатора  $C$  при протичане на преходен процес в показаната схема, когато напрежението на източника е  $E = U_0$  ( $t > 0$ ). (Указание: използвайте операторния метод за анализ на сложни вериги. За определяне на неизвестния ток използвайте метода на заместване с еквивалентна схема на основата на теоремата на Тевенен).



- Зад.3.9 Определете зависимостта от времето на изходното напрежение  $U_2(t)$  при протичане на преходен процес в показаната схема, когато на входа ѝ се подава скок на напрежението  $U_1(t) = U_0$  ( $t > 0$ ). (Указание: използвайте операторния метод за анализ на сложни вериги, като се опитате да представите израза за изходното операторно напрежение като сума от събираеми от вида  $C_i/(p \pm \alpha_i)$ ;  $p$  е операторната променлива. За опростяване на изчисленията въведете и означението  $\beta = R/L$ ).



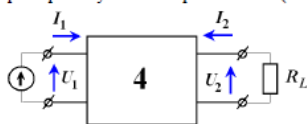
- Зад.3.10 Определете зависимостта от времето на изходното напрежение  $U_2(t)$  при протичане на преходен процес в показаната схема, когато на входа ѝ се подава постоянно напрежение  $U_1 = U_0$  ( $t > 0$ ). Начертайте качествено получената крива за  $U_2(t)$ . (Указание: Използвайте операторния метод за анализ на сложни вериги, като се опитате да представите израза за изходното операторно напрежение като сума от събираеми от вида  $C_i/(p \pm \alpha_i)$ ;  $p$  е операторната променлива. За целта използвайте формулата на Виет за полученото квадратно уравнение. За опростяване на изчисленията въведете и означението  $\omega_0 = 1/RC$ ).



## 5. Матричен метод за анализ на многополюсници

### Първични и вторични параметри на многополюсниците

Многополюсниците се характеризират с **първични и вторични параметри**. По-долу е представен пример за тези параметри в случая за четири-полюсник (вж и следващата страница)



#### Първични параметри:

Може да се покаже, че между параметрите на входа и изхода на четири-полюсника  $U_1, I_1, U_2$  и  $I_2$  – съществува функционална зависимост, поради която всяка двойка параметри може да се изрази чрез другата двойка. Това става чрез 6 вида матрици (вж. по-нататък)

$$F(U_1, U_2, I_1, I_2) = 0$$

#### Вторични параметри:

Това са важните параметри на четири-полюсника, чрез които той се описва при свързването му с други електрически вериги. Това са:  $K_U$  – коефициент на предаване по напрежение,  $K_I$  – коефициент на предаване по ток,  $R_{in}$  – входно съпротивление,  $R_{out}$  – изходно съпротивление (вж. дефинициите по формулите по-долу):

$$K_U = U_2 / U_1 \quad K_I = I_2 / I_1 \quad R_{in} = U_1 / I_1 \quad R_{out} = U_2 |_{open} / I_2 |_{short}$$

### Матрично описание на много-полюсниците

$$F(U_1, U_2, I_1, I_2) = 0$$

Наличието на функционална зависимост между параметрите  $U_1, I_1, U_2$  и  $I_2$  на входа и изхода на четири-полюсника означава, че всяка една двойка от тези параметри зависи от другата двойка и връзката между тях се дава с 6 вида матрици. Можем да формираме следните двойки вектор-стъбове от известни параметри – токове и напрежения, и да въведем 6 матрици, които свързват тези двойки:

$$\begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} = \hat{Z} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \hat{Y} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} \quad \hat{Z} = \frac{1}{\hat{Y}} \quad \hat{Y} = \frac{1}{\hat{Z}}$$

$$\begin{pmatrix} U_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \hat{H} \begin{pmatrix} I_1 \\ U_2 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} I_1 \\ U_2 \end{pmatrix} = \hat{G} \begin{pmatrix} U_1 \\ I_2 \end{pmatrix} \quad \hat{H} = \frac{1}{\hat{G}} \quad \hat{G} = \frac{1}{\hat{H}}$$

$$\begin{pmatrix} U_1 \\ I_1 \end{pmatrix} = \hat{A} \begin{pmatrix} U_2 \\ I_2 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} U_2 \\ I_2 \end{pmatrix} = \hat{B} \begin{pmatrix} U_1 \\ I_1 \end{pmatrix} \quad \hat{A} = \frac{1}{\hat{B}} \quad \hat{B} = \frac{1}{\hat{A}}$$

### Y-матрици

**Y-матрица** (матрица на адмитанса/проводимостта). Нека за да известни двойката напрежения ( $U_1, U_2$ ). Тогава неизвестни са двойката токове ( $I_1, I_2$ ). Връзката се дава с Y-матрицата:

$$\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \hat{Y} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} \quad \hat{Y} = \begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{\hat{Z}}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} I_1 = Y_{11}U_1 + Y_{12}U_2 \\ I_2 = Y_{21}U_1 + Y_{22}U_2 \end{cases}$$

Физичен смисъл на Y-параметрите (измерение на проводимост)

$$Y_{11} = \left. \frac{I_1}{U_1} \right|_{U_2=0} \quad \text{При режим на "късо съединение" (short) на изходната верига} \quad Y_{21} = \left. \frac{I_2}{U_1} \right|_{U_2=0} \quad \text{При режим на "късо съединение" (short) на изходната верига}$$

$$Y_{12} = \left. \frac{I_1}{U_2} \right|_{U_1=0} \quad \text{При режим на "късо съединение" (short) на входната верига} \quad Y_{22} = \left. \frac{I_2}{U_2} \right|_{U_1=0} \quad \text{При режим на "късо съединение" (short) на входната верига}$$

### Връзки между матриците Z, Y, H, G, A и B. Пример

Функционална зависимост между параметрите  $U_1, I_1, U_2$  и  $I_2$  на входа и изхода на четири-полюсника означава още, че между елементите на всички матрици, използвани за описание на четири-полюсниците, съществуват връзки. Тук ще дадем следният пример. Нека един четириполюсник има известни H-параметри. Да се определят неговите Z-параметри

Пример:



Решение:

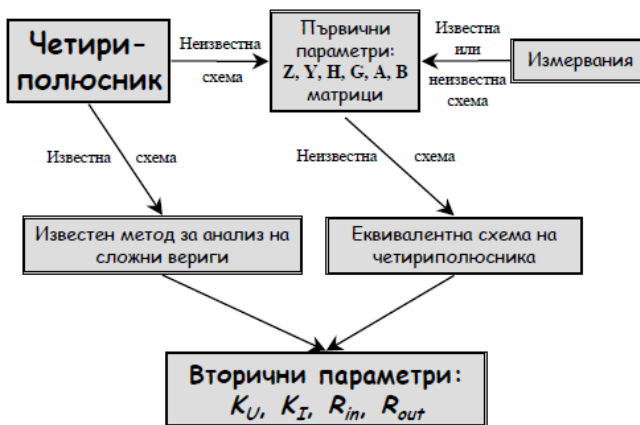
$$\begin{pmatrix} U_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ U_2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} U_1 = H_{11}I_1 + H_{12}U_2 \\ I_2 = H_{21}I_1 + H_{22}U_2 \end{cases} \quad \begin{cases} U_1 = Z_{11}I_1 + Z_{12}I_2 \\ U_2 = Z_{21}I_1 + Z_{22}I_2 \end{cases}$$

Сега от първата колона трябва да се изразят величините  $U_2$ , и да се заместят във втората:

$$U_2 = \frac{1}{H_{22}}I_2 - \frac{H_{21}}{H_{22}}I_1 \quad U_1 = H_{11}I_1 + H_{21} \left( \frac{1}{H_{22}}I_2 - \frac{H_{21}}{H_{22}}I_1 \right)$$

### Връзка между първични и вторични параметри



### Z-матрици

**Z-матрица** (матрица на импеданса). Нека за да известни двойката токове ( $I_1, I_2$ ). Тогава неизвестни са двойката напрежения ( $U_1, U_2$ ). Връзката се дава със Z-матрицата:

$$\begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} = \hat{Z} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} \quad \hat{Z} = \begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} U_1 = Z_{11}I_1 + Z_{12}I_2 \\ U_2 = Z_{21}I_1 + Z_{22}I_2 \end{cases}$$

Физичен смисъл на Z-параметрите (измерение на съпротивление)

$$Z_{11} = \left. \frac{U_1}{I_1} \right|_{I_2=0} \quad \text{При режим на "празен ход" (open) на изходната верига} \quad Z_{21} = \left. \frac{U_2}{I_1} \right|_{I_2=0} \quad \text{При режим на "празен ход" (open) на изходната верига}$$

$$Z_{12} = \left. \frac{U_1}{I_2} \right|_{I_1=0} \quad \text{При режим на "празен ход" (open) на входната верига} \quad Z_{22} = \left. \frac{U_2}{I_2} \right|_{I_1=0} \quad \text{При режим на "празен ход" (open) на входната верига}$$

### H-матрици

**H-матрица** (матрица на смесени параметри). Използва се често при характеризиране на транзистори.

$$\begin{pmatrix} U_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \hat{H} \begin{pmatrix} I_1 \\ U_2 \end{pmatrix} \quad \hat{H} = \begin{pmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} U_1 = H_{11}I_1 + H_{12}U_2 \\ I_2 = H_{21}I_1 + H_{22}U_2 \end{cases}$$

Физичен смисъл на H-параметрите (измерение на импеданс, проводимост и коефициенти на предаване по напрежение и ток)

$$H_{11} = \left. \frac{U_1}{I_1} \right|_{U_2=0} \quad \text{При режим на "късо съединение" (short) на изходната верига} \quad H_{21} = \left. \frac{I_2}{I_1} \right|_{U_2=0} \quad \text{При режим на "късо съединение" (short) на изходната верига}$$

$$H_{12} = \left. \frac{U_1}{U_2} \right|_{I_1=0} \quad \text{При режим на "празен ход" (open) на входната верига} \quad H_{22} = \left. \frac{I_2}{U_2} \right|_{I_1=0} \quad \text{При режим на "празен ход" (open) на входната верига}$$

### Пример: преход H ⇒ Z

Продължаваме примера и изразяваме  $U_2$ :

$$U_2 = -\frac{H_{21}}{H_{22}}I_1 + \frac{1}{H_{22}}I_2 \quad U_1 = \left( H_{11} - \frac{H_{21}}{H_{22}} \right) I_1 + \frac{H_{21}}{H_{22}}I_2$$

Окончателно:

$$Z_{11} = H_{11} - \frac{H_{21}}{H_{22}} \quad Z_{21} = -\frac{H_{21}}{H_{22}}$$

$$Z_{12} = \frac{H_{21}}{H_{22}} \quad Z_{22} = \frac{1}{H_{22}}$$

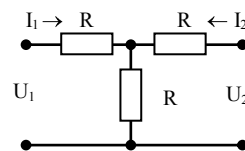


По показания начин могат да се определят връзките между матричните елементи на всички матрици, използвани за описание на четири-полюсника. Макар и по-трудно, подобна връзка може да се установи и с елементите на S-матрицата.

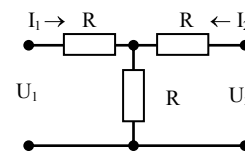




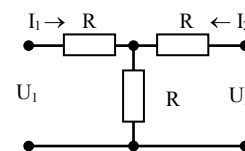
III.3.20 Определете Z параметрите на дадения четириполусник. (Указание: от общото определение за тези параметри в четириполусника реализирайте в неговата схема режими на “празен ход” и “късо съединение” и определете търсените параметри. Отчетете и симетрията в схемата).



III.3.21 Определете Y параметрите на дадения четириполусник. (Указание: от общото определение за тези параметри в четириполусника реализирайте в неговата схема режими на “празен ход” и “късо съединение” и определете търсените параметри. Отчетете и симетрията в схемата).

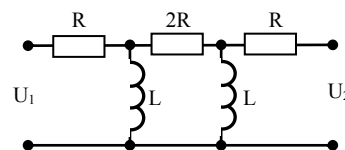


III.3.22 Определете Z параметрите на дадения четириполусник. (Указание: от общото определение за тези параметри в четириполусника реализирайте в неговата схема режими на “празен ход” и “късо съединение” и определете търсените параметри. Отчетете и симетрията в схемата).

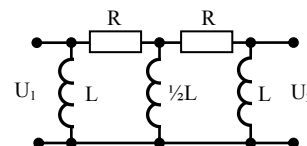


### Задачи за определяне на входен импеданс

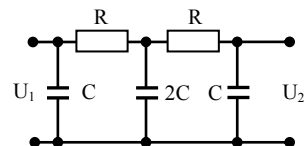
IV.2.22 Определете входният импеданс  $Z_{in}$  на дадения четириполусник за периодични сигнали, когато към изходните му полюси е включен товарен импеданс  $Z_L = 0$  или  $\infty$  (не са показани на фигурата). (Указание: За улеснение при изчисленията въведете величината  $\omega_0 = R/L$ ).



IV.2.23 Определете входният импеданс  $Z_{in}$  на дадения четириполусник за периодични сигнали, когато към изходните му полюси е включен товарен импеданс  $Z_L = 0$  или  $\infty$  (не са показани на фигурата). (Указание: За улеснение при изчисленията въведете величината  $\omega_0 = R/L$ ).



IV.2.21 Определете входният импеданс  $Z_{in}$  на дадения четириполусник за периодични сигнали, когато към изходните му полюси е включен товарен импеданс  $Z_L = 0$  или  $\infty$  (не са показани на фигурата). (Указание: За улеснение при изчисленията въведете величината  $\omega_0 = 1/RC$ ).



IV.2.20 Определете входният импеданс  $Z_{in}$  на дадения четириполусник за периодични сигнали, когато към изходните му полюси е включен товарен импеданс  $Z_L = 0$  или  $\infty$  (не са показани на фигурата). (Указание: За улеснение при изчисленията въведете величината  $\omega_0 = 1/RC$ ).

