Задачи по тензорна алгебра и тензорен анализ

www.phys.uni-sofia.bg/~petersl/MMF.pdf

29 октомври 2007 г.

1 Тензорна алгебра

1.1 Правила на Айнщайн за сумиране. Символ на Кронекер и символ на Леви–Чивита

Символ на Кронекер	Символ на Леви–Чивита
$\delta_{ij} := \begin{cases} 1 & \text{при } j = i \\ 0 & \text{при } j \neq i \end{cases}$	$\varepsilon_{ijk} := -\varepsilon_{jik} := \varepsilon_{jki} \ \ \forall\, i,j,k = 1,2,3$ $\varepsilon_{123} := 1$
$\delta_{ii} = \delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33} = 3$	$\Rightarrow \begin{cases} \varepsilon_{123} := \varepsilon_{231} := \varepsilon_{312} := 1 \\ \varepsilon_{132} := \varepsilon_{213} := \varepsilon_{321} := -1 \end{cases}$

Връзка между с символа на Кронекер и символа на Леви–Чивита

$$\varepsilon_{ijk} = \det\begin{pmatrix} \delta_{1i} & \delta_{1j} & \delta_{1k} \\ \delta_{2i} & \delta_{2j} & \delta_{2k} \\ \delta_{3i} & \delta_{3j} & \delta_{3k} \end{pmatrix} = \varepsilon_{123}\,\varepsilon_{ijk} = -\varepsilon_{213}\,\varepsilon_{ijk} = -\det\begin{pmatrix} \delta_{2i} & \delta_{2j} & \delta_{2k} \\ \delta_{1i} & \delta_{1j} & \delta_{1k} \\ \delta_{3i} & \delta_{3j} & \delta_{3k} \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} \delta_{2i} & \delta_{2j} & \delta_{2k} \\ \delta_{3i} & \delta_{3j} & \delta_{3k} \\ \delta_{1i} & \delta_{1j} & \delta_{1k} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow\ \varepsilon_{ijk}\,\varepsilon_{mnp} = \det\begin{pmatrix} \delta_{im} & \delta_{in} & \delta_{ip} \\ \delta_{jm} & \delta_{jn} & \delta_{jp} \\ \delta_{km} & \delta_{kn} & \delta_{kp} \end{pmatrix} \tag{1}$$

Заместваме този резултат в случая на два повтарящи се индекса и развиваме детерминантата чрез адюнгирани количества по реда или стълба, съдържащ сумационния индекс:

$$\varepsilon_{ijk}\,\varepsilon_{mnk} = \det\begin{pmatrix} \delta_{im} & \delta_{in} & \delta_{ik} \\ \delta_{jm} & \delta_{jn} & \delta_{jk} \\ \delta_{km} & \delta_{kn} & \delta_{kk} \end{pmatrix} = \delta_{kk}\det\begin{pmatrix} \delta_{im} & \delta_{in} \\ \delta_{jm} & \delta_{jn} \end{pmatrix} - \delta_{kn}\det\begin{pmatrix} \delta_{im} & \delta_{ik} \\ \delta_{jm} & \delta_{jk} \end{pmatrix} + \delta_{km}\det\begin{pmatrix} \delta_{in} & \delta_{ik} \\ \delta_{jn} & \delta_{jk} \end{pmatrix} =$$

$$= 3\det\begin{pmatrix} \delta_{im} & \delta_{in} \\ \delta_{jm} & \delta_{jn} \end{pmatrix} - \det\begin{pmatrix} \delta_{im} & \delta_{in} \\ \delta_{jm} & \delta_{jn} \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} \delta_{in} & \delta_{im} \\ \delta_{jn} & \delta_{jm} \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} \delta_{im} & \delta_{in} \\ \delta_{jm} & \delta_{jn} \end{pmatrix} \tag{2}$$

Отново използваме горния резултат (2), за да изведем случая на две двойки повтарящи се индекси:

$$\varepsilon_{ijk}\,\varepsilon_{mjk} = \det\begin{pmatrix} \delta_{im} & \delta_{ij} \\ \delta_{jm} & \delta_{jj} \end{pmatrix} = 3\delta_{im} - \delta_{jm}\delta_{ij} = 2\delta_{im} \tag{3}$$

И накрая идва последният случай:

$$\varepsilon_{ijk}\,\varepsilon_{ijk} = 2\delta_{ii} = 6 = 3! \tag{4}$$

Правилата (1-4) са основата на боравенето със символа на Леви–Чивита в 3-мерното пространство. Ако повтарящите се индекси не са на една и съща позиция в произведение на два символа на Леви–Чивита ние ги нагаждаме чрез размествания, които броим, за да направим правилната корекция в знака.

За произволно n-мерно линейно пространство символът на Кронекер е същия, но индексите пробягват стойности от 1 до n и като следствие от правилото на Айнщайн имаме $\delta_{ii} = n$, а символът на Леви–Чивита се дефинира със същите свойства, но с n на брой индекси.

$$\varepsilon_{12\dots n} := 1 \ ; \quad \varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_k i_{k+1} \dots i_n} := -\varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_{k+1} i_k \dots i_n} \ \ \forall\, k = 1, 2 \dots n{-}1 \quad \forall\, i_1, i_2, \dots i_n = 1, 2, \dots n \tag{5}$$

Всичко казано за 3-мерния случай е валидно и тук.

Задача 1: Като използувате математична индукция докажете формулата за k-кратно сумиране.

$$\varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_{n-k}\, p_1 p_2 \dots p_k}\, \varepsilon_{j_1 j_2 \dots j_{n-k}\, p_1 p_2 \dots p_k} = k!\ \det \begin{pmatrix} \delta_{i_1 j_1} & \delta_{i_1 j_2} & \dots & \delta_{i_1 j_{n-k}} \\ \delta_{i_2 j_1} & \delta_{i_2 j_2} & \dots & \delta_{i_2 j_{n-k}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta_{i_{n-k} j_1} & \delta_{i_{n-k} j_2} & \dots & \delta_{i_{n-k} j_{n-k}} \end{pmatrix}$$

Упътване: Както в 3-мерния случай стартираме от произведение без сумиране ($k{=}0$)

$$\varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_n}\, \varepsilon_{j_1 j_2 \dots j_n} = 0!\ \det \begin{pmatrix} \delta_{i_1 j_1} & \delta_{i_1 j_2} & \dots & \delta_{i_1 j_n} \\ \delta_{i_2 j_1} & \delta_{i_2 j_2} & \dots & \delta_{i_2 j_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta_{i_n j_1} & \delta_{i_n j_2} & \dots & \delta_{i_n j_n} \end{pmatrix}$$

Задача 2: Нека $\hat{A}$ е диагонална матрица с елементи по диагонала a_i. Използувайки сумационното правило на Айнщайн,

а) представете елементите на матрицата с помощта на числата a_i и символът на Кронекер ($A_{ij} =?$);

б) ако B е друга диагонална матрица с елементи b_i докажете, че произведението на двете диагонални матрици е комутативно.

Задача 3: Дадени са числата $\lambda_i \ : \ i = 1 \dots n$ и матрицата A. Представете в индексен вид:

а) матрицата , получена от матрицата A чрез умножение на първи ред с λ_1, втори ред с $\lambda_2, \dots$, n-ти ред с λ_n.

б) матрицата C, получена от матрицата A чрез умножение на първи стълб с λ_1, втори стълб с $\lambda_2, \dots$, n-ти стълб с λ_n.

Задача 4: Представете произволна матрица A, като сума от диагонална, безследова симетрична и антисиметрична матрица.

Задача 5: Разложете матрицата 3×3 на диагонална матрица, симетрична матрица с нули по главния диагонал и антисиметрична матрица, като линейно независимите компоненти за всяка една от трите матрици са съответно a_i, b_i и c_i. Представете изходната матрица чрез символа на Кронекер и символа на Леви–Чивита и трите тройки числа.

Задача 6: Детерминанти и адюнгирани количества за матрици $3{\times}3$

а) $\varepsilon_{ijk}\det\|A\| := \varepsilon_{mnp}\,A_{im}A_{jn}A_{kp}\ ;\ \ A_{ik}\widetilde{A}_{jk} := A_{ki}\widetilde{A}_{kj} = \delta_{ij}\det\|A\| \ \Rightarrow\ \widetilde{A}_{ij} = \dfrac{1}{2}\varepsilon_{ikl}\,\varepsilon_{jpq}A_{kp}A_{lq}$

б) $\widetilde{A}_{ij} := \dfrac{1}{2}\varepsilon_{ikl}\,\varepsilon_{jpq}A_{kp}A_{lq}\ ;\ \ A_{ik}\widetilde{A}_{jk} = A_{ki}\widetilde{A}_{kj} = \delta_{ij}\det\|A\| \ \Rightarrow\ \varepsilon_{ijk}\det\|A\| = \varepsilon_{mnp}\,A_{im}A_{jn}A_{kp}$

в) $\varepsilon_{ijk}\det\|A\| := \varepsilon_{mnp}\,A_{im}A_{jn}A_{kp}\ ;\ \ \widetilde{A}_{ij} := \dfrac{1}{2}\varepsilon_{ikl}\,\varepsilon_{jpq}A_{kp}A_{lq} \ \Rightarrow\ A_{ik}\widetilde{A}_{jk} = A_{ki}\widetilde{A}_{kj} = \delta_{ij}\det\|A\|$

Задача 7: За произволна $n{\times}n$ матрица A като използвате индексния формализъм и дефиницията на $\det A$;

$$\varepsilon_{i_1i_2\ldots i_n}\det A := \varepsilon_{j_1j_2\ldots j_n}A_{i_1j_1}A_{i_2j_2}\ldots A_{i_nj_n} \tag{6}$$

докажете:

а) $\det A = \dfrac{1}{n!}\varepsilon_{i_1i_2\ldots i_n}\varepsilon_{j_1j_2\ldots j_n}A_{i_1j_1}A_{i_2j_2}\ldots A_{i_nj_n}$; г) $\det(aA) = a^n\det A$;
б) $\det A^T = \det A$, където $A^T_{ij} := A_{ji}$; д) ако $A = -A^T$, кога $\det A \equiv 0$;
в) $\varepsilon_{j_1j_2\ldots j_n}\det A = \varepsilon_{i_1i_2\ldots i_n}A_{i_1j_1}A_{i_2j_2}\ldots A_{i_nj_n}$; е) $\det(AB) = \det A\,\det B$.

Задача 8: Ако A е една $n\times n$ матрица, а $\tilde{A}$ е нейната адюнгирана (матрицата от адюнгираните количества $\widetilde{A}_{ij}$ на елементите A_{ij}), дефинирана както следва,

$$\varepsilon_{k\,i_1i_2\ldots i_{n-1}}\widetilde{A}_{kj} := \varepsilon_{j\,j_1j_2\ldots j_{n-1}}A_{i_1j_1}A_{i_2j_2}\ldots A_{i_{n-1}j_{n-1}} \tag{7}$$

докажете чрез индексния формализъм следните равенства:

а) $\widetilde{A}_{ij} := \dfrac{1}{(n-1)!}\,\varepsilon_{i\,i_1i_2\ldots i_{n-1}}\varepsilon_{j\,j_1j_2\ldots j_{n-1}}A_{i_1j_1}A_{i_2j_2}\ldots A_{i_{n-1}j_{n-1}}$ г) $(\widetilde{aA}) = a^{n-1}\widetilde{A}$;
б) $\widetilde{A^T} = \widetilde{A}^{\,T}$; д) $\widetilde{AB} = \widetilde{A}\,\widetilde{B}$;
в) $\varepsilon_{k\,j_1j_2\ldots j_{n-1}}\widetilde{A}_{ik} := \varepsilon_{i\,i_1i_2\ldots i_{n-1}}A_{i_1j_1}A_{i_2j_2}\ldots A_{i_{n-1}j_{n-1}}$ е) $\det\widetilde{A} = (\det A)^{n-1}$.
ж) ако $\widetilde{\widetilde{A}} := \widetilde{B}$, където $B := \widetilde{A}$, докажете че $\widetilde{\widetilde{A}} = (\det A)^{n-2}A$.

Елементарно следствие от е) или ж) е връзката $\det\widetilde{\widetilde{A}} = (\det A)^{(n-1)^2}$.

Намирането на детерминанта на квадратна матрица A, ако са известни адюнгираните количества може да стане по първи ред с адюнгираните количества на първи ред: $A_{1k}\widetilde{A}_{1k} = \det A$ или по втори ред с адюнгираните количества на втори ред $A_{2k}\widetilde{A}_{2k} = \det A$ и т. н. Ако пък развиваме по даден ред с адюнгираните количества на елементи от друг ред получаваме нула например $A_{1k}\widetilde{A}_{2k} = A_{1k}\widetilde{A}_{3k} = A_{2k}\widetilde{A}_{1k} = A_{2k}\widetilde{A}_{3k} = A_{3k}\widetilde{A}_{1k} = A_{3k}\widetilde{A}_{2k} = 0$. Детерминантата можем да получим и чрез развиване по стълб като линейна комбинация от елементите от стълба с коефициенти съответните адюнгирани количества – $A_{k1}\widetilde{A}_{k1} = A_{k2}\widetilde{A}_{k2} = A_{k3}\widetilde{A}_{k3} = \det A$. И отново имаме: $A_{k1}\widetilde{A}_{k2} = A_{k1}\widetilde{A}_{k3} = A_{k2}\widetilde{A}_{k1} = A_{k2}\widetilde{A}_{k3} = A_{k3}\widetilde{A}_{k1} = A_{k3}\widetilde{A}_{k2} = 0$. Всичко това може да се напише наведнъж с помощта на символът на Кронекер:

$$A_{ik}\widetilde{A}_{jk} = A_{ki}\widetilde{A}_{kj} = \delta_{ij}\det A\,. \tag{8}$$

Задача 9: За детерминанти и адюнгирани количества на матрици $n\times n$ докажете следните три твърдения:

а) Ако са дадени (6) и (7) $\Rightarrow$ (8);
б) Ако са дадени (7) и (8) $\Rightarrow$ (6);
в) Ако са дадени (6) и (8) $\Rightarrow$ (7).

Задача 10: Ако $A := \|A_{ij}\|$ е неособена ($\det A \neq 0$) квадратна матрица получете

$$A^{-1} = \frac{(\widetilde{A})^T}{\det A}$$

Задача 11: Ако $A := \|A_{ij}\|$ е матрица 3×3, а $\widetilde{A} := \|\widetilde{A}_{ij}\|$ е матрицата,образувана от адюнгираните количества, докажете равенството:

$$Sp\,\widetilde{A} = \frac{1}{2}[(Sp\,A)^2 - (Sp\,A^2)]$$

1.2 Собствени вектори и собствени стойности на квадратна матрица

Задача 12: Да се намерят собствените стойности и собствените вектори на матрицата

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

Задача 13: За произволна неособена $n \times n$ матрица A със собствена стойност λ покажете, че собственият вектор $\vec{V}$ се явява собствен вектор на матрицата A^{-1} при собствена стойност $1/\lambda$.

Задача 14: Дадена е 3×3 матрица A. Да се докаже, че характеристичният полином $\det|A - \lambda\delta| = 0$ има вида:

$$P_3(\lambda) = -\lambda^3 + Sp(A)\lambda^2 - Sp(\widetilde{A})\lambda + detA\,, \tag{9}$$

където $\widetilde{A}$ е матрицата, образувана от адюнгираните количества на A.

а) Докажете (9) като го разпишете непосредствено.

б) Докажете (9) като го разпишете чрез индексния δ-ε–формализъм.

Коментар: Ако в тримерния случай вариантите на доказателство а) и б) са почти еднакво дълги, то извеждането на подобен за (9) резултат за n-мерния случай става много по-удобно с помощта на индексния формализъм.

Задача 15: С помощта на индексния формализъм докажете, че:

а) $$P_n(\lambda) = (-\lambda)^n + Sp(A)(-\lambda)^{n-1} + \ldots - Sp(\widetilde{A})\lambda + \det A\,; \tag{10}$$

б) Сумата от собствените стойности е равна на следата, а произведението на детерминантата на матрицата A.

Задача 16: Като използувате резултат (9), разгледайте случая, когато A е ортогонална матрица 3×3 ($A := \alpha$, където $\alpha\alpha^T = 1$) и докажете, че характеристичният полином има вида:

а) $P_3(\lambda) = -(\lambda - 1)[\lambda^2 + (1 - Sp(\alpha))\lambda + 1]$ в случай на въртене;

б) $P_3(\lambda) = -(\lambda + 1)[\lambda^2 - (1 + Sp(\alpha))\lambda + 1]$ в случай на въртене с отражение.

Въпрос 1: Може ли на един и същи собствен вектор да съответствуват повече от една собствена стойност?

Въпрос 2: За какви n една реална матрица $n\times n$ има поне една реална собствена стойност?

Въпрос 3: Определен ли е еднозначно собственият вектор $\vec{V}$ от собствената стойност λ и ако не е каква е неопределеността при:

а) λ е еднократна собствена стойност;

б) λ е k-кратна собствена стойност?

Задача 17: Ако λ е намерена еднократна собствена стойност за матрицата A, докажете че компонентите на собствения вектор могат да се вземат като адюнгираните количества на елементите от подходящ ред на матрицата $B := A - \lambda\,\delta$. Доказателството става на две стъпки:

а) Като използвате резултат (8) покажете, че адюнгираните количества по кой да е ред, записани като вектор-стълб удовлетворяват уравнението за собствените стойности.

б) Може да се намери ред който има поне едно ненулево адюнгирано количество. Това адюнгирано количество заедно с останалите адюнгирани количества по същия ред образуват вектор стълб, който е собствен на матрицата A.

Задача 18: Ако $A_{ij} = A_{ji}$ докажете, че:

а) всички собствени стойности са реални числа;

б) собствените вектори при различни собствени стойности са ортогонални.

Естественото обобщение на симетричната матрица над полето на комплексните числа е т.нар. *ермитова* или *самоспрегната* матрица A, дефинирана със свойството $A := A^\dagger$, където $A^\dagger := (A^*)^T$ $(A^\dagger_{ij} := A^*_{ji})$ се нарича *ермитово спрегнатата* на матрицата A. Когато матрицата е реална $(A^* = A)$, тогава ермитовото спрягане е транспониране.

Задача 19: За ортогонална матрица α в n-мерно пространство докажете, че всяка собствена стойност е число, чиито модул е единица $|\lambda| = 1$. Като следствие получаваме, че ако $\lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda = \pm 1$.

Естественото обобщение на ортогоналната матрица над полето на комплексните числа е т.нар. *унитарна матрица* U, дефинирана със свойството $U^{-1} := U^\dagger$. Когато матрицата е реална $(U^* = U)$ тогава ермитовото спрягане е транспониране.

Упътване: Като използувате дефиницията на ортогонална матрица, преработете уравнението за собствени вектори $\alpha_{ij} V_j = \lambda V_i$. Тук съществено се стартира с предположението, че λ е комплексно число, защото при четномерни линейни пространства може да нямаме нито едно реално число λ[1].

Въпрос 4: Ако A е известна симетрична $n \times n$ матрица, на която са ни известни $n-1$ от собствените ѝ стойности, можем ли да намерим неизвестната без да решаваме характеристичното уравнение и как?

Въпрос 5: Всяка ли матрица, чиито редове или стълбове са ортогонални вектори е ортогонална?

Задача 20: Ако стълбовете/редовете на квадратна матрица са ортогонални вектори, ортогонални ли са редовете/стълбовете? Направете общо разглеждане или посочете контрапример, при който ако редовете/стълбовете са ортогонални стълбовете/редовете не са ортогонални.

Въпрос 6: Съществува ли трансформация, която може да приведе произволна $n \times n$ матрица в триъгълен вид?

[1] Най-прост пример е матрицата $\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$, чиито собствени стойности са $\lambda_{1,2} = \cos\varphi \pm i \sin\varphi$

Съществуването на ос на въртене е пряко свързано със задачата за собствени вектори и собствени стойности.

а) за всяка ортогонална матрица α, за която $\det\alpha = 1$, съществува собствен вектор при собствена стойност $\lambda = 1$

б) За матрица на въртене в 3-мерното пространство покажете, че $\lambda = 1$ е или еднократна или трикратна собствена стойност.

Очевидно вторият случай за нас е безинтересен, защото реализира тъждественото преобразуване, което не е общия случай на въртене. Остава първия случай, който показва, че инвариантното относно произволно въртене подпространство е едномерно.

Задача 21: Намерете собствения вектор на матрицата на въртене на ъгъл φ около оста Oy при собствена стойност $\lambda = 1$.

Задача 22: В 3-мерното евклидово пространство координатната система K чрез въртене на ъгъл $\varphi_1 = \pi/2$ около оста Oz отива в к. с. K', след което K' чрез въртене около оста Ox' на ъгъл $\varphi_2 = \pi/2$ отива в K''. Ако разглеждаме K'' като получена от K чрез единично въртене около неизвестна ос намерете:

а) матрицата на преход от K в K'';

б) неизвестната ос на въртене;

в) ъгълът на завъртане.

Упътване: След като намерите матрицата на преход от K в K'' търсите нейния собствен вектор-стълб при собствена стойност $\lambda = 1$. Трите числа са компонентите му в координатната система K. Той задава оста на въртене и всички колинеарни на него вектори са също собствени вектори, т.е. това е инвариантното при преход от K в K'' подпространство.

Намираме произволен вектор, който е ортогонален на собствения вектор и получаваме от него нов вектор чрез действието на матрицата на преход от K в K''. Ъгълът между двата вектора от перпендикулярното на оста пространство е ъгъла на въртене.

Задача 23: Разгледайте предната задача при същите ъгли на въртене, само че най-напред е завъртането около оста Ox и след това около оста Oz'

1.3 Трансформационни закони

Задача 24: Да се покаже, че ако в някоя координатна система компонентите на два вектора са пропорционални, те са пропорционални във всяка друга координатна система.

Задача 25: Да се покаже, че големината на вектора (псевдовектора) е скалар (псевдоскалар).

Задача 26: Да се покаже, че ако A_i и B_i са компоненти на вектори, величината A_iB_i е скалар.

Задача 27: Да се покаже, че ако величината A_iB_i е псевдоскалар, а B_i са компоненти на вектор, A_i са компоненти на псевдовектор.

Задача 28: Да се покаже, че ако $\Psi_{i_1 i_2 \ldots i_k\, pq\, j_1 j_2 \ldots j_l}$ е тензор от ранг $k{+}l{+}2$ със симетрия по индексите pq, то при произволна трансформация симетрията се запазва.

Задача 29: Да се покаже, че следата и детерминантата на псевдотензор от II ранг са съответно псевдоскалар и скалар.

Задача 30: Покажете, че ако величината $\Phi_{ij}\Psi_{ij}$ е скалар, а Ψ_{ij} са компоненти на тензор II ранг, величините Φ_{ij} също са компоненти на тензор II ранг.

Задача 31: Нека величините $\Phi_{ij}\, A_j$ са компоненти на вектор и A_j са също компоненти на вектор. Да се покаже, че Φ_{ij} са компоненти на тензор от II ранг.

Задача 32: Да се покаже, че необходимото и достатъчно условие деветте величини Φ_{ij} да са компоненти на тензор от II ранг, е величината $\Phi_{ij}\, A_i B_j$ да е скалар при всеки избор на векторите $\vec{A}$ и $\vec{B}$ с компоненти съответно A_i и B_i.

Задача 33: Ако A_i са компоненти на вектор, а Φ_{ijk} са компоненти на тензор от III ранг, да се покаже, че величините $A_i\,\Phi_{ijk}$ са компоненти на тензор от II ранг.

Задача 34: Да се покаже, че ако Φ_{ik} са компоненти на тензор от II ранг, а Ψ_{ikj} са компоненти на тензор от III ранг, величините $\Phi_{ik}\,\Psi_{ikj}$ са компоненти на вектор.

Задача 35: Нека $\widehat{\Phi}$ $\widehat{\Psi}$ са два произволни тензора от II ранг с компоненти Φ_{ij} и Ψ_{ij}. Да се покаже, че величините $\Phi_{ik}\,\Psi_{ik}$ и $\varepsilon_{imk}\,\Phi_{il}\,\Psi_{lk}$ са съответно компоненти на скалар и псевдовектор.

Задача 36: Спрямо к.с. K са определени: скаларът $c = 3$, векторът $\vec{A} = (4, 0, -1)$ и тензорът $\widehat{\Phi} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & -2 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Определете тези величини спрямо к.с. K', ако тя се получава от к.с. K, чрез ротация около оста Oy в директна посока на ъгъл $\pi/6$.

Задача 37: Да се намерят симетричната $\widehat{\Phi}^s$ и антисиметричната $\widehat{\Phi}^a$ част на тензорите от II ранг, както и тензорите от по нисък ранг, които им съответствуват:

$$\widehat{\Phi}_1 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 4 & 0 & -1 \\ 16 & 1 & 1 \end{pmatrix},\ \widehat{\Phi}_2 = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 4 & 4 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix},\ \widehat{\Phi}_3 = \begin{pmatrix} -5 & -4 & -3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Задача 38: Спрямо к.с. K е определен тензорът $\widehat{\Phi} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 4 & 0 & -1 \\ 16 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Определете симетричната $\widehat{\Phi}'^s$ и антисиметричната $\widehat{\Phi}'^a$ част на този тензор спрямо к.с. K', ако преминаването от K в K' става чрез въртене около оста Oz в директна посока на ъгъл $\pi/2$. Да се определят и компонентите на вектора, съответстващ (*адюнгиран*) на антисиметричната част на тензора спрямо K'.

Задача 39: В к.с. K е определен тензорът $\widehat{\Phi}$ се задава с матрицата $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}$. Да се намерят симетричната и антисиметричната част, тензорът с нулева следа и тензорите от по-нисък ранг (адюнгираният вектор, следата) на този тензор в к.с. K', ако тя се получава от K чрез отражение спрямо равнината xOy.

Задача 40: Нека тензорът $\widehat{\Phi}$ се представя в дясно-ориентирана декартова координатна система $K=\{O,\,x,y,z\}$ от матрицата $\widehat{\Phi}\leftrightarrow\begin{pmatrix}-1&1&0\\-1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$. Да се намерят компонентите на тензора $\widehat{\Phi}$ в дясно-ориентирана координатна система $K'=\{O,\,x',y',z'\}$, ако е известно, че: $\sphericalangle(x,y')=\pi/3$, $\sphericalangle(x,z')=\pi/3$, $\sphericalangle(z,z')=\pi/6$, а $\sphericalangle(x,x')$ е остър.

1.4 Тензорни умножения

Задача 41: Ако $\widehat{\Phi}$ е произволен тензор II ранг, покажете, че $\widehat{\Phi}^T\cdot\widehat{\Phi}$ е симетричен тензор.

Задача 42: $\varphi:=\sphericalangle(\vec{A},\vec{B})$. Ако $\cos\varphi:=\dfrac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{|\vec{A}||\vec{B}|}\ \Rightarrow\ |\vec{A}\times\vec{B}|=|\vec{A}||\vec{B}|\sin\varphi$.

Задача 43: Запишете в инвариантна форма:

а) $\varepsilon_{inl}\varepsilon_{irs}\varepsilon_{lmp}\varepsilon_{stp}\,A_nA_rB_mC_t$ *Отг.:* $A^2(\vec{B}\cdot\vec{C})+(\vec{A}\cdot\vec{B})(\vec{A}\cdot\vec{C})$

б) $\varepsilon_{inl}\varepsilon_{krs}\varepsilon_{lmp}\varepsilon_{stp}\,A_rD_nB_kE_iC_tF_m$ *Отг.:* $[(\vec{A}\times\vec{B})\times\vec{C}]\cdot[(\vec{D}\times\vec{E})\times\vec{F}]$

Задача 44: Ако $\widehat{\Phi}:=\vec{A}\vec{B}$; $\vec{A}$, $\vec{B}$ – произволни вектори.

а) Определете $\widehat{\Phi}^s$, $\widehat{\Phi}^a$ и $\vec{F}$, където $\vec{F}$ е векторът, съответстващ на $\widehat{\Phi}^a$.

б) Определете инвариантите на $\widehat{\Phi}$ ($Sp\,\widehat{\Phi}=?$, $\frac{1}{2}\left[(Sp\,\widehat{\Phi})^2-Sp\,\widehat{\Phi}^2\right]=?$, $\det\widehat{\Phi}=?$).

Задача 45: Докажете, че $(\widehat{\Phi}\cdot\vec{A},\widehat{\Phi}\cdot\vec{B},\widehat{\Phi}\cdot\vec{C})\equiv\det\widehat{\Phi}\,(\vec{A},\vec{B},\vec{C})$

Задача 46: Дадени са ортогоналните един на друг векторите $\vec{A}$ и $\vec{B}$, т.е. $\vec{A}\cdot\vec{B}=0$

а)Да се построи ортогонален базис в тримерното пространство, определен от векторите $\vec{A}$ и $\vec{B}$.

б)Да се построи ортонормиран базис в тримерното пространство, определен от векторите $\vec{A}$ и $\vec{B}$.

в)Да се докаже, че $\vec{A}\times\vec{B}$ е линейно независим от $\vec{A}$ и $\vec{B}$

Задача 47: Ако $\widehat{\Phi}$ е антисиметричен тензор, а $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$ са произволни вектори, докажете тъждеството: $(\widehat{\Phi}\cdot\vec{A},\widehat{\Phi}\cdot\vec{B},\widehat{\Phi}\cdot\vec{C})\equiv 0$

Задача 48: Докажете тъждествата:

а) $(\vec{A}\times\vec{B})\times\vec{C}+(\vec{B}\times\vec{C})\times\vec{A}+(\vec{C}\times\vec{A})\times\vec{B}=\vec{0}$ (тъждество на Якоби);

б) $\Big((\vec{A}\times\vec{B})\times(\vec{A}\times\vec{C})\,,\,(\vec{B}\times\vec{C})\times(\vec{B}\times\vec{A})\,,\,(\vec{C}\times\vec{A})\times(\vec{C}\times\vec{B})\Big)\equiv(\vec{A},\vec{B},\vec{C})^4$;

в) $(\vec{A}\times\vec{B})\cdot(\vec{C}\times\vec{D})\equiv\begin{vmatrix}\vec{A}\cdot\vec{C}&\vec{B}\cdot\vec{C}\\\vec{A}\cdot\vec{D}&\vec{B}\cdot\vec{D}\end{vmatrix}$;

г) $(\vec{A}\times\vec{B})\times(\vec{C}\times\vec{D})\equiv(\vec{A},\vec{C},\vec{D})\vec{B}-(\vec{B},\vec{C},\vec{D})\vec{A}\equiv(\vec{A},\vec{B},\vec{D})\vec{C}-(\vec{A},\vec{B},\vec{C})\vec{D}$.

Задача 49: $\widehat{\Phi}$, $\vec{A}$, $\vec{B}$ – произволни тензор и вектори. Да се покаже, че $(\widehat{\Phi}\cdot\vec{A})\cdot\vec{B}-(\widehat{\Phi}\cdot\vec{B})\cdot\vec{A}\equiv-2(\vec{F},\vec{A},\vec{B})$

Задача 50: Докажете, че при всеки избор на $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$, $\vec{D}$, $\widehat{\Phi}$, векторите $(\vec{D}\times\widehat{\Phi})\cdot\vec{A}$, $(\vec{D}\times\widehat{\Phi})\cdot\vec{B}$ и $(\vec{D}\times\widehat{\Phi})\cdot\vec{C}$ са компланарни.

Задача 51: Докажете ортогоналност на векторите:
$\vec{A}\times(\vec{A}\times\widehat{\Phi}\cdot\vec{B})$, $[\vec{A}\times(\widehat{\Phi}\cdot\vec{B}\vec{C})]\cdot\vec{D}$, $[\vec{A}(\widehat{\Phi}\cdot\vec{B})]\cdot\vec{C}$.

Задача 52: За произволни вектори $\vec{A}$, $\vec{B}$ и $\vec{C}$, да се намери векторът
$\vec{N}:=\vec{A}\cdot(\widehat{\Phi}\times\vec{B})+\vec{B}\cdot(\widehat{\Phi}\times\vec{C})+\vec{C}\cdot(\widehat{\Phi}\times\vec{A})$, ако $\widehat{\Phi}:=\vec{A}\vec{B}+\vec{B}\vec{C}+\vec{C}\vec{A}$. *Отг.* $\vec{N}=\vec{0}$

Задача 53: За произволни вектори $\vec{A}$, $\vec{B}$ и $\vec{C}$, за тензорът $\widehat{\Phi}:=\vec{A}\vec{B}+\vec{B}\vec{C}+\vec{C}\vec{A}$ е в сила $\det\widehat{\Phi}=(\vec{A},\vec{B},\vec{C})^2$.

Задача 54: Ако $\widehat{\Phi}:=\vec{A}\times(\vec{B}\vec{C})+\vec{B}\times(\vec{C}\vec{A})+\vec{C}\times(\vec{A}\vec{B})$, да се докаже, че са изпълнени равенствата $\vec{A}\cdot\widehat{\Phi}=(\vec{A},\vec{B},\vec{C})\vec{A}$, $\vec{B}\cdot\widehat{\Phi}=(\vec{A},\vec{B},\vec{C})\vec{B}$, $\vec{C}\cdot\widehat{\Phi}=(\vec{A},\vec{B},\vec{C})\vec{C}$.

Задача 55: Докажете тъждеството:
$\vec{D}\cdot[(\vec{A}\vec{B})\times\vec{C}+(\vec{B}\vec{C})\times\vec{A}+(\vec{C}\vec{A})\times\vec{B}]\equiv(\vec{A},\vec{B},\vec{C})\vec{D}$.

Задача 56: $\vec{A}$, $\vec{B}$ и $\vec{C}$ – произволни вектори. Да се намери смесеното произведение на векторите $\vec{A}\cdot\widehat{\Phi}$, $\vec{B}\cdot\widehat{\Phi}$ и $\vec{C}\cdot\widehat{\Phi}$, ако $\widehat{\Phi}:=\vec{A}\times(\vec{B}\vec{C})+\vec{B}\times(\vec{C}\vec{A})+\vec{C}\times(\vec{A}\vec{B})$. *Отг.* $(\vec{A}\cdot\widehat{\Phi},\vec{B}\cdot\widehat{\Phi},\vec{C}\cdot\widehat{\Phi})=(\vec{A},\vec{B},\vec{C})^4$

Задача 57: Да се докажат тъждествата:
а) $\left\{\vec{A}\times\left[\widehat{\Phi}\cdot(\vec{B}(\vec{C}\times\vec{D}))\right]\right\}\cdot\vec{C}\equiv\vec{0}$; б) $\left\{\vec{A}\times\left[\widehat{\Phi}\cdot(\vec{B}(\vec{C}\times\vec{D}))\right]\right\}\cdot\vec{D}\equiv\vec{0}$.

Задача 58: Да се опрости изразът $\left[\vec{B}\times(\vec{A}\times\widehat{\Phi})\cdot\vec{C}\right]\cdot\vec{A}$, където $\widehat{\Phi}:=\vec{B}\vec{C}$, а векторите $\vec{A}$ и $\vec{B}$ са ортогонални. *Отг.* $A^2B^2C^2$

Задача 59: Покажете, че тензорът $\widehat{\Phi}:=\vec{A}\vec{B}+\vec{B}\vec{A}$ удовлетворява уравнението
$\vec{A}\cdot(\widehat{\Phi}\times\vec{B})+\widehat{\Phi}\cdot(\vec{B}\times\vec{A})=(\vec{A}\times\widehat{\Phi})\cdot\vec{B}$ при произволни $\vec{A}$ и $\vec{B}$.

Задача 60: Векторът $\vec{N}:=[(\vec{A}\vec{B}+\vec{B}\vec{A})\times\vec{A}]\cdot(\vec{A}\times\vec{B})$. Да се докаже, че $\vec{A}$ и $\vec{N}$ са колинеарни и противоположно насочени.

Задача 61: $\vec{A}$ – произволен вектор, $\widehat{\Phi}$ – произволен антисиметричен тензор. Да се докажат тъждествата:
а) $\vec{A}\times\widehat{\Phi}=\vec{F}\vec{A}-(\vec{A}\cdot\vec{F})\,\hat{\delta}$, където $\vec{F}$ е векторът, съответстващ на $\widehat{\Phi}$;
б) $\widehat{\Phi}\times\vec{A}=\vec{A}\vec{F}-(\vec{A}\cdot\vec{F})\,\hat{\delta}$.
Упътване: Да се работи в инвариантна форма.

Задача 62: Да се докажат тъждествата:
а) $\equiv$
б) $\left\{[\vec{A}\cdot(\vec{C}\times(\vec{B}\vec{A}))]\times\vec{B}\right\}\cdot\vec{C}\equiv-(\vec{A},\vec{B},\vec{C})^2$

Задача 63: Да се докаже, че $\widetilde{\Phi}=\frac{1}{2}[(Sp\,\widehat{\Phi})^2-Sp\,\widehat{\Phi}^2]\hat{\delta}+(\widehat{\Phi}^2)^T-Sp\widehat{\Phi}\,\widehat{\Phi}^T$
Упътване: Използувайте равенството (1).

Задача 64: Докажете, че $\vec{A}\times\widehat{\Phi}\times\vec{B}=(\vec{B}\cdot\widehat{\Phi}\cdot\vec{A}-\vec{A}\cdot\vec{B}\,Sp\widehat{\Phi})\,\hat{\delta}+\vec{A}\cdot\vec{B}\,\widehat{\Phi}-Sp\widehat{\Phi}\,\vec{B}\vec{A}+\vec{B}(\widehat{\Phi}\cdot\vec{A})-(\vec{B}\cdot\widehat{\Phi})\vec{A}$
Упътване: Използувайте равенството (1).

1.5 Собствени вектори и собствени стойности на тензор от II ранг

<u>*Задача 65:*</u> Докажете, че произволен проектиращ тензор има поне една собствена стойност, която е 1, а останалите собствени стойности са или 0 или 1.

<u>*Упътване:*</u> Общо свойство на всеки проектиращ тензор е свойството $\Pi\cdot\Pi = \Pi$, като по дефиниция са изключени нулев и единичен тензор.

<u>*Задача 66:*</u> Дефинирайте тензор II ранг, който на всеки вектор съпоставя неговата ортогонална проекция по направление на единичен вектор $\vec{n}$. Получете собствените стойности и собствените вектори на тензора.

<u>*Задача 67:*</u> Дефинирайте тензор II ранг, който проектира произволен вектор в подпространството, ортогонално на единичен вектор $\vec{n}$. Получете собствените стойности и собствените вектори на тензора.

<u>*Задача 68:*</u> Намерете собствените стойности и собствените вектори на *тензор огледало* $\widehat{O} := \hat{\delta} - 2\dfrac{\vec{N}\vec{N}}{N^2}$. Напишете адюнгирания тензор $\widetilde{\widehat{O}}$, $\widehat{O}^2$ и инвариантите.

<u>*Задача 69:*</u> Да се представи симетричния тензор II ранг $\widehat{\Phi}$, в базис от собствени вектори $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$, съответстващи на собствени стойности a, b, c.

<u>*Задача 70:*</u> Ако $\vec{A}\cdot\vec{B} = 0$ да се намерят собствените стойности и собствените вектори на тензора $\widehat{\Phi}$, определен като:

а) $\widehat{\Phi} := \vec{A}\vec{A}$;

б) $\widehat{\Phi} := \vec{A}\vec{B}$;

в) $\widehat{\Phi} := \vec{A}\vec{B} + \vec{B}\vec{A}$;

г) $\widehat{\Phi} := (|\vec{A}\times\vec{B}|\vec{A}\times\vec{B})(\vec{A}\times|\vec{A}\times\vec{B}|\vec{B})$;

д) $\widehat{\Phi} := (\vec{A}\vec{B} - \vec{B}\vec{A})\times(\vec{A}\times\vec{B})$;

е) $\widehat{\Phi} := \vec{A}\vec{B} + \vec{B}\vec{A} + (\vec{A}\times\vec{B})(\vec{A}\times\vec{B})$;

ж) $\widehat{\Phi} := \vec{B}(\vec{A}\times\vec{B}) + (\vec{A}\times\vec{B})\vec{B}$;

з) $\widehat{\Phi} := (\vec{A}\times\delta)\cdot(\vec{B}\times\delta)$

<u>*Задача 71:*</u> Ако $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$ са линейно независими вектори:

а) Да се докаже, че $\vec{B}\times\vec{C}$, $\vec{C}\times\vec{A}$ и $\vec{A}\times\vec{B}$ са линейно независими;

б) Да се намери матрицата на трансформация от свързваща двата базиса

<u>*Задача 72:*</u> Даде е векторът $D := a\vec{A} + b\vec{B} + c\vec{C}$, където $\vec{A}$, $\vec{B}$ и $\vec{C}$ образуват базис.

а) Намерете коефициентите a, b, c в разложението

б) На същия вектор намерете коефициентите a', b', c', така че

$D := a'(\vec{B}\times\vec{C}) + b'(\vec{C}\times\vec{A})B + c'(\vec{A}\times\vec{B})$

<u>*Задача 73:*</u> Ако α е тензор на въртене ($\alpha\cdot\alpha^T{=}\delta$, $\det\alpha{=}1$), V е собствен вектор $\alpha\cdot\vec{V}{=}\vec{V}$, а $\vec{P}\perp\vec{V}$ и ако $V^2{=}P^2{=}1$, докажете следните равенства:

а) $\alpha\cdot\vec{P}\perp\vec{V}$;　　в) $(\vec{V}\times\vec{P})\cdot\alpha\cdot(\vec{V}\times\vec{P}) = \vec{P}\cdot\alpha\cdot\vec{P}$;

б) $\vec{P}\cdot\alpha\cdot\vec{P} \leqslant 1$;　　г) $(\vec{V}\times\vec{P})\cdot\alpha\cdot\vec{P} = -\vec{P}\cdot\alpha\cdot(\vec{V}\times\vec{P})$.

<u>*Упътване:*</u> За б) използувайте, че $|\vec{P} - \alpha\cdot\vec{P}| \geqslant 0$; за в) и г) използувайте свойствата на матрицата на въртене и формулата за адюнгирана матрица.

<u>*Задача 74:*</u> Да се получи вида на

<u>*Задача 75:*</u> Тензор на въртене на ъгъл φ около ос, определена от вектора $\vec{n}$, $|\vec{n}|{=}1$ се задава като $\widehat{\alpha}_{(\varphi,\vec{n})} := \vec{n}\vec{n} + \cos\varphi\,(\delta - \vec{n}\vec{n}) + \sin\varphi\,(\vec{n}\times\delta)$.

а) $\widehat{\alpha}_{(\varphi_2,\vec{n})}\cdot\widehat{\alpha}_{(\varphi_1,\vec{n})} = \widehat{\alpha}_{(\varphi_1,\vec{n})}\cdot\widehat{\alpha}_{(\varphi_2,\vec{n})} = \widehat{\alpha}_{(\varphi_1+\varphi_2,\vec{n})}$; б) $\widehat{\alpha}^T_{(\varphi,\vec{n})} = \widehat{\alpha}_{(-\varphi,\vec{n})}$

<u>*Задача 76:*</u> Намерете собствените стойности и собствените вектори на тензора $\vec{S}\vec{S}$, където $\vec{S}$ е адюнгираният вектор на *комутатора*[2] $[\vec{A}\vec{B}+\vec{B}\vec{A}\,,\ \vec{C}\vec{C}\,]$. (Векторите $\vec{A}$, $\vec{B}$ и $\vec{C}$ са произволни.)

<u>*Задача 77:*</u> Намерете матрицата, представяща тензора $\widehat{\Phi} := (\vec{A}\times\hat{\delta})\times\vec{B} + (\vec{B}\times\hat{\delta})\times\vec{A}$ в дясна декартова координатна система, чиито орти са колинеарни на собствените вектори на тензора $\widehat{\Psi}:=\vec{A}\vec{A}+\vec{B}\vec{B}$, ако $\vec{A}\perp\vec{B}$.

<u>*Задача 78:*</u> В координатна система K тензорите $\widehat{\Phi}$ и $\widehat{\Psi}$ имат компоненти

$$\widehat{\Phi} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \widehat{\Psi} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Да се намерят компонентите на $\widehat{\Phi}$ и $\widehat{\Psi}$ в дясна координатна система K', чиито оси са еднопосочни със собствените вектори на $\widehat{\Phi}$.

1.6 Тензорна функция

<u>*Задача 79:*</u> Ако $\widehat{\Phi}$ е произволен тензор от II ранг, докажете, че $f(\widehat{\Phi}^T) \equiv f(\widehat{\Phi})^T$. Разгледайте случай на симетричен и антисиметричен тензор.

<u>*Задача 80:*</u> Докажете, че ако $\vec{V}$ е собствен вектор на тензора $\widehat{\Phi}$ при собствена стойност λ, $\vec{V}$ е собствен вектор и на тензора $f(\widehat{\Phi})$ при собствена стойност $f(\lambda)$.

<u>*Задача 81:*</u> Намерете $\exp\widehat{\Phi}$, ако $\widehat{\Phi}:=\vec{A}\vec{B}$. *Отг.* $\exp(\vec{A}\vec{B}) = \delta + \frac{\exp(\vec{A}\cdot\vec{B})-1}{\vec{A}\cdot\vec{B}}\,\vec{A}\vec{B}$.

<u>*Задача 82:*</u> Да се намерят собствените стойности и собствените вектори на $e^{\vec{A}\vec{B}}$

<u>*Задача 83:*</u> Ако $\widehat{\Phi}$ е произволен симетричен тензор II ранг, докажете тъждеството
$\det\exp\widehat{\Phi} = \exp Sp\,\widehat{\Phi}$

<u>*Задача 84:*</u> Ако $\widehat{\Pi}$ е проектор, да се докажат равенствата:
а) $e^{n\widehat{\Pi}} = \delta + (e^n-1)\widehat{\Pi}$
б) $f(\widehat{\Pi}) = f(0)\delta + (f(1)-1)\widehat{\Pi}$

<u>*Задача 85:*</u> Да се намери exp()

1.7 Матрици на Паули и кватерниони

Дадени са матриците:

$$\sigma_0 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \sigma_1 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_2 := \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_3 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

σ_1, σ_2 и σ_3 са известни като *матриците на Паули.* (Умножени с $\frac{1}{2}\hbar$ в квантовата механика те се явяват компоненти на *оператора на спина* на една частица със спин с големина 1/2).

[2] Комутатор на два тензора от II ранг $\widehat{\Phi}$ и $\widehat{\Psi}$ се дефинира като тензор $[\widehat{\Phi},\widehat{\Psi}]:=\widehat{\Phi}\cdot\widehat{\Psi}-\widehat{\Psi}\cdot\widehat{\Phi}$

Задача 86: Докажете равенствата

а) $\sigma_k\sigma_l = \delta_{kl}\sigma_0 + i\varepsilon_{klm}\sigma_m$; $k,l,m = 1,2,3$

б) $Sp(\sigma_\mu\sigma_\nu) = 2\delta_{\mu\nu}$; $\mu,\nu = 0,1,2,3$

в) $Sp(\sigma_k\sigma_l\sigma_m) = 2i\varepsilon_{klm}$

г) $Sp(\sigma_k\sigma_l\sigma_m\sigma_n) = 2(\delta_{kl}\delta_{mn} - \delta_{km}\delta_{ln} + \delta_{kn}\delta_{ml})$

д) Ако $\vec{a}\cdot\vec{\sigma} := a_i\sigma_i$ докажете, че $(\vec{a}\cdot\vec{\sigma})(\vec{b}\cdot\vec{\sigma}) = \vec{a}\cdot\vec{b}\,\sigma_0 + i(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{\sigma}$

Съществува изоморфизъм между алгебрата на четирите матрици σ_μ и алгебрата на кватернионите. Съответствието се получава, ако вземем за *образуващи* или базис (подобно на 1 и i при комплексните числа) елементите $\check{e}_0 := \sigma_0$ и $\check{e}_k := i\sigma_k$. Така получаваме множеството на кватернионите числа $\mathbb{H}$ като 4-мерно линейно пространство с базис $\{\check{e}_\mu\}$ дефинирано *кватернионно умножение.*

1) $\check{a} = a_\mu\check{e}_\mu$, където $\{a_\mu \in \mathbb{R}, \mu = 0,1,2,3\}$;

2) $\check{e}_0\check{e}_\mu = \check{e}_\mu\check{e}_0 = \check{e}_\mu$;

3) $\check{e}_k\check{e}_l = -\delta_{kl}\check{e}_0 + \varepsilon_{klm}\check{e}_m$; $k,l,m = 1,2,3$;

Освен това се въвежда и *кватернионно спрягане*

4) Ако $\check{a} := a_0 + a_k\check{e}_k$, то $\check{a}^* := a_0 - a_k\check{e}_k$.

Задача 87: Докажете, че $\check{a}\,\check{a}^* \equiv \check{a}^*\check{a} \in \mathbb{R}$.

Задача 88: Като използувате, че $e^{i\vec{a}\cdot\vec{\sigma}} := \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(i\vec{a}\cdot\vec{\sigma})^n}{n!}$ и $\vec{n}\cdot\vec{n} = 1$, докажете $e^{i\varphi\,\vec{n}\cdot\vec{\sigma}} = \cos\varphi\,\sigma_0 + i\sin\varphi\,(\vec{n}\cdot\vec{\sigma})$

Задача 89: Като използувате резултата от предишната задача докажете, че за произволен вектор $\vec{V}$ е в сила равенството:

$$e^{-i\frac{\varphi}{2}\,\vec{n}\cdot\vec{\sigma}}\,(\vec{V}\cdot\vec{\sigma})\,e^{i\frac{\varphi}{2}\,\vec{n}\cdot\vec{\sigma}} = (\widehat{\alpha}_{(\varphi,\vec{n})}\cdot\vec{V})\cdot\vec{\sigma}\ ,$$

където $\widehat{\alpha}_{(\varphi,\vec{n})}$ е тензора на въртене на ъгъл φ (в директна посока) около ос определена от единичния вектор $\vec{n}$.

(!) **Ценността на горното тъждество се заключава във възможността да намираме резултантните ъгъл и ос на въртене при последователност от произволни въртения, без да се налага да търсим собствения вектор на тензора на резултантното въртене.**

Задача 90: Векторът $\vec{V}$ последователно се завърта най-напред на ъгъл φ_1 около ос определена от единичния вектор $\vec{n}_1$, после завъртаме на ъгъл φ_2 около ос определена от единичния вектор $\vec{n}_2$. Крайният резултат е нов вектор, получен от изходния при еднократно (резултантното) въртене около подходяща ос, определена от единичен вектор $\vec{n}$ на ъгъл φ. Намерете $\vec{n} = ?$ и $\varphi = ?$.

1.8 Представяне на вектор и тензор II ранг в произволен базис

Всеки вектор $\vec{V}$ можем да представим в произволен базис $\vec{V} = V_i\,\vec{p}^{\,i} := V_1\,\vec{p}^{\,1} + V_2\,\vec{p}^{\,2} + V_3\,\vec{p}^{\,3}$, съответно произволен тензор II ранг $\widehat{\Phi}$ можем да представим в базис определен от векторите $\vec{p}^{\,i}$ чрез всевъзможните тензорни произведения $\vec{p}^{\,i}\,\vec{p}^{\,j}$, както следва $\widehat{\Phi} = \Phi_{ij}\,\vec{p}^{\,i}\,\vec{p}^{\,j}$. Тензорните произведения $\vec{p}^{\,i}\,\vec{p}^{\,j}$ образуват базис в 9 мерно линейно, а коефициентите Φ_{ij} са *представянето на тензора* в този базис или още *компоненти на тензора.*

Задача 91: Ако $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$ са некомпланарни вектори запишете матриците на тензорите $\vec{A}\vec{A}$, $\vec{A}\vec{B}$, $\vec{C}\vec{A}$, $\vec{A}\vec{B}+\vec{B}\vec{A}$, $\vec{A}\vec{C}-\vec{C}\vec{A}$, $\vec{A}\vec{B}+\vec{B}\vec{A}-3\vec{C}\vec{C}$, $(\vec{A}\times\vec{B})(\vec{A}\times\vec{B})$, $(\vec{A}\times\vec{B})(\vec{B}\times\vec{C})+(\vec{B}\times\vec{C})(\vec{C}\times\vec{A})+(\vec{C}\times\vec{A})(\vec{A}\times\vec{B})$ в представяне определено от векторите $\vec{A}$, $\vec{B}$ и $\vec{C}$.

Ако $\{\vec{p}^{\,i}\,;\ i=1,2,3\}$ е произволен базис в евклидово пространство, на него можем да съпоставим т.н. *дуален базис* $\{\vec{q}^{\,i}\,;\ i=1,2,3\}$, дефиниран чрез равенствата $\vec{p}^{\,i}\cdot\vec{q}^{\,j}:=\delta_{ij}$

Задача 92: Ако $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$ са три некомпланарни вектора:

а) Намерете дуалния базис;

б) Ако отъждествите $\vec{p}^{\,1}:=\vec{A}$, $\vec{p}^{\,2}:=\vec{B}$, $\vec{p}^{\,3}:=\vec{C}$, запишете $\vec{p}^{\,i}$ изразени чрез $\vec{q}^{\,i}$.

Дуалният базис ни дава възможност да намерим компонентите на вектор и тензор II ранг в произволен (неортогонален) базис.

Задача 93: Намерете компонентите на произволен вектор и тензор II ранг в произволен базис.

Задача 94: Представете единичния тензор в произволен базис, като използувате инвариантната дефиниция на единичен тензор $\delta\cdot\vec{V}:=\vec{V}\ \ \forall\vec{V}$.

Задача 95: Представете единичния тензор $\hat{\delta}$ в базис определен от векторите $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{A}\times\vec{B}$

Задача 96: Ако $\widehat{\Phi}$ е симетричен тензор ($\widehat{\Phi}\equiv\widehat{\Phi}^T$) намерете представянето му в базис от собствени вектори

1.9 Тензорни уравнения

Задача 97: Даден е тримерният вектор $\vec{A}$.

а) Намерете тензора $\widehat{\Phi}$, за който е известно, че $\vec{A}$ е негов собствен вектор със собствена стойност f ($\widehat{\Phi}\cdot\vec{A}=f\vec{A}$) и че $\widehat{\Phi}\times\vec{A}=\widehat{\Psi}_{\vec{A}}$, където $\widehat{\Psi}_{\vec{A}}$ е антисиметричен тензор, чиито адюнгиран вектор е $\vec{A}$.

б) Намерете останалите собствени вектори на $\widehat{\Phi}$.

Задача 98: Ако $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$ са три известни некомпланарни вектори, а a, b и c са три известни скалара, намерете вектора $\vec{X}$, удовлетворяващ системата уравнения:

$$\left|\begin{array}{l}\vec{A}\cdot\vec{X}=a\\ \vec{B}\cdot\vec{X}=b\\ \vec{C}\cdot\vec{X}=c\end{array}\right. .$$

Задача 99: Намерете решението на тензорното уравнение $\vec{X}=\vec{A}+\vec{X}\times\vec{B}$

Задача 100: На какви условия трябва да отговарят векторите $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$, за да бъде изпълнено:

$$\vec{A}\vec{A}+\vec{B}\vec{B}+\vec{C}\vec{C}=\hat{\delta}$$

Задача 101: Нека $\vec{A}$ и $\vec{B}$ са зададени вектори, а векторът $\vec{V}$ е решение на уравнението $\vec{V}=\vec{A}+\vec{B}\times\vec{V}$. Намерете собствените стойности и собствените вектори на тензора $\widehat{\Phi}:=\vec{B}\vec{B}+\vec{V}\vec{V}$ при условие, че $\vec{A}\perp\vec{B}$.

Задача 102: Дадени са векторите $\vec{M}$ и $\vec{N}$, а $\vec{P}$ удовлетворява системата $\left|\begin{array}{l}\vec{P}\cdot\vec{M}=\ 0\\ \vec{P}\times\vec{M}=\vec{N}\end{array}\right.$

Намерете собствените стойности и собствените вектори на тензора $\widehat{\Phi}:=\vec{P}\left\{(\vec{M}\times\vec{N})\cdot\left[\vec{P}(\vec{M}\times\vec{N})\right]\cdot\vec{P}\right\}(\vec{M}\times\vec{N})$.

Запишете собствените вектори в координатна система, в която $\vec{M}$ и $\vec{N}$ се задават както следва $\vec{M}\leftrightarrow\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$, $\vec{N}\leftrightarrow\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$.

Задача 103: Дадени са неколинеарните вектори $\vec{A}$ и $\vec{B}$. Тензорът $\hat{X}$ е решение на системата

$$\left|\begin{array}{l}\vec{A}\times\hat{X}=\ \hat{0}\\ \vec{B}\cdot\hat{X}=\vec{B}\end{array}\right.$$

Намерете собствените стойности и съответстващите им собствените вектори на тензора $\widehat{\Phi}:=[\vec{B}\times(\hat{X}\times\vec{A})\times\vec{B}]\times\vec{A}$.

Задача 104: Нека $\widehat{\Phi}:=\vec{A}\times(\vec{A}\times(\vec{A}\times(\vec{A}\times\vec{B})))\,\vec{X}+\vec{X}\vec{X}\,Sp(\vec{A}\vec{B})$, където

$$\left|\begin{array}{l}\vec{A}\times\vec{X}=\vec{B}\\ \vec{A}\cdot\vec{X}=0\end{array}\right.$$

а) Намерете собствените стойности и собствените вектори на тензора $\widehat{\Phi}$.

б) Пресметнете $Sp\,\widehat{\Phi}$, ако е известно, че в координатна система векторите $\vec{A}$ и $\vec{B}$ се представят както следва: $\vec{A}\leftrightarrow\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$, $\vec{B}\leftrightarrow\begin{pmatrix}2\\5\\-2\end{pmatrix}$.

Задача 105: Да се намерят собствените стойности и собствените вектори на тензора $\widehat{\Phi}:=e^{\vec{X}\vec{A}}+e^{\vec{A}\vec{X}}$, където векторът $\vec{X}$ е решение на системата $\left|\begin{array}{l}\vec{A}\cdot\vec{X}=1\\ \vec{B}\times\vec{X}=\vec{0}\end{array}\right.$.

Задача 106: Да се намерят собствените стойности и собствените вектори на тензора $\widehat{\Phi}:=\dfrac{(\vec{A}\times\vec{X})(\vec{C}\times\vec{X})}{Sp(\vec{B}\vec{X})}$, където $\vec{X}$ е решение на уравнението $\vec{X}+\vec{A}(\vec{B}\cdot\vec{X})=\vec{C}$.

Задача 107: Нека векторите $\vec{X}$ и $\vec{Y}$ са решения на системите $\left|\begin{array}{l}\vec{X}\times\vec{A}=\vec{B}\\ \vec{X}\cdot\vec{A}=1\end{array}\right.$ $\left|\begin{array}{l}\vec{B}\times\vec{Y}=\vec{A}\\ \vec{B}\cdot\vec{Y}=1\end{array}\right.$.

а) Да се намерят $\vec{X}\cdot\vec{Y}$, $\vec{X}\times\vec{Y}$ и $\vec{X}\vec{Y}=\widehat{\Phi}$.

б) Да се пресметне матрицата представяща антисиметричната част $\widehat{\Phi}^a$ на тензора $\widehat{\Phi}:=\vec{X}\vec{Y}$ в координатна система K, в която векторите $\vec{A}$ и $\vec{B}$ се представят съответно:

$\vec{A}\leftrightarrow\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$, $\vec{B}\leftrightarrow\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}$.

2 Тензорен анализ

2.1 Диференциални оператори от I ред

Задача 1: Ако $\vec{A}$ е постоянен вектор, пресметнете

Задача 2: Да се опрости изразът:

$$\mathbf{grad}\,\frac{e^{-\lambda r}}{r},\quad \text{за } \lambda{:=}const{>}0$$

$$\mathbf{grad}\,\frac{\exp|\vec{A}{\times}\vec{r}|}{\vec{A}{\cdot}\vec{r}} \qquad \mathbf{grad}\,\exp\left(\frac{\vec{A}{\cdot}\vec{r}}{r^3}\right)$$

$$\mathbf{grad}\,\sin^2\left(r^2\frac{\vec{P}{\cdot}\vec{Q}}{\vec{U}{\cdot}\vec{V}}\right)$$

Задача 3: Да се определи големината на най-бързото изменение на полето $U(\vec{r}){=}\vec{r}\cdot\triangle(\vec{r}{\times}\vec{V}(\vec{r}))$, където $\vec{V}(\vec{r}))$ е адюнгираният вектор на тензора $\widehat{\Phi}{:=}\vec{r}\vec{A}{-}\vec{A}\vec{r}$, а $\vec{A}$ е постоянен вектор с големина $|\vec{A}|{=}2$.

2.2 Диференциални оператори от II и по-висок ред

Задача 4: Ако $\vec{A}$ е постоянен вектор, пресметнете

а) $\Delta(r(\vec{A}{\cdot}\vec{r}))$
б) $\Delta(r^2(\vec{A}{\cdot}\vec{r}))$
в) $\Delta[(\vec{A}{\cdot}\vec{r})(\vec{B}{\times}\vec{r})]$, където $\vec{A},\ \vec{B}=const$

Задача 5: Ако $\vec{A}:=const$, пресметнете векторното поле $\vec{U}(\vec{r})=\vec{r}{\cdot}\left[\mathbf{Grad}\,\vec{r}\times\mathbf{grad}\,\frac{\vec{A}{\cdot}\vec{r}}{r}\right]$ и докажете, че удовлетворява уравнението $\Delta\vec{U}+\frac{2\vec{U}}{r^2}=0$.

2.3 Интеграли

Задача 6: $\oint_s(\vec{B}{\times}\nabla r^2){\cdot}\mathrm{d}\vec{s}$

Задача 7: Да се пресметне потокът на векторно поле $\vec{U}(\vec{r})$ през повърхността на прав кръгов цилиндър с радиус $\rho{=}2$ и височина $h{=}3$, ако:

$$\vec{U}(\vec{r}):=r^3\vec{A}\times\mathbf{rot}\left[\frac{\nabla|\vec{A}{\times}\vec{r}|^{\frac{\vec{A}\cdot\vec{r}}{r}}}{|\vec{A}{\times}\vec{r}|^{\frac{\vec{A}\cdot\vec{r}}{r}}}-\frac{\nabla|\vec{A}{\times}\vec{r}|}{|\vec{A}{\times}\vec{r}|}\,\mathbf{div}\vec{A}r\right],$$

където $\vec{A}$ е постоянен вектор с големина $|\vec{A}|{=}\frac{1}{2\sqrt{3}}$.

Задача 8: Намерете потока на полето $\vec{U}(\vec{r}):=\dfrac{\left\{\vec{A}{\cdot}\Delta[\vec{r}(\vec{A}{\cdot}\vec{r})]\right\}\mathbf{grad}\,e^r}{e^r\mathbf{div}(r^2\vec{r})}$ през сфера с център в началото на координатната система и радиус $R{:=}2002$, където $\vec{A}$ е постоянен вектор с големина $|\vec{A}|{:=}5$

Задача 9: Пресметнете $\int_{r\leqslant R}(\vec{A}{\times}\nabla)^2\frac{1}{r}\,dv$, където $\vec{A}$ е постоянен вектор с големина $\sqrt{\frac{3}{8}}$.

Задача 10: Да се пресметне $\int_V dv\, \vec{U}(\vec{r})$, където

$$\vec{U}(\vec{r}) := \frac{\vec{r}}{r^2} \times \mathbf{rot}\left[\ln|\,\vec{A}\times\vec{r}|\,\frac{\vec{r}\times(\vec{A}\times\vec{r})}{r^3}\right] + \frac{\vec{r}}{r^2}\mathbf{div}\frac{\vec{r}\times(\vec{A}\times\vec{r})}{r^3} + \vec{A}\cdot\mathbf{Grad}\,\frac{\vec{r}}{r^3}\,,$$

$\vec{A} := const$, а V е сфера с център в началото на координатната система и радиус R.

Задача 11: Да се пресметне $\oint_S \phi(\vec{r})\, d\vec{s}$, където S е сфера с радиус $R = 1/2$ и център в началото на координатната система, $\vec{A} := const$, а

$$\phi(\vec{r}) := \frac{\mathbf{div}(r\vec{r})\,\mathbf{grad}\,(\sin r)}{\cos r} \cdot \Delta\Big\{\Big[\mathbf{rot}(r^2\vec{A})\Big] \times r\,\mathbf{grad}\, r\Big\}\ .$$

Задача 12: Да се пресметне интегралът

$$I := \int \mathbf{grad}\left\{\frac{\mathbf{grad}\, B^{\vec{B}\cdot\vec{r}}}{B^{\vec{B}\cdot\vec{r}}\ln B}\cdot \mathbf{rot}[\vec{r}\,\mathbf{div}(\vec{A}\cdot\vec{r}\vec{r})]\right\}\cdot d\vec{l}$$

където L е произволна крива с начало в т. (2,7,8) и край в т. (4,3,9) ;
$\vec{A} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\vec{B} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$

Задача 13: Дадени са точките $M_1(1,-1,2)$, $M_2(3,2,6)$ и векторът $\vec{A} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$. Да се изчисли линейният интеграл $\int_{M_1}^{M_2} r^2\Delta\Big[\vec{A}\ln(\frac{1}{6}\Delta r^3)\Big]\cdot d\vec{l}$ покрива, свързваща точките M_1 и M_2 .