Annuaire de l'Universite de Sofia "St. Kliment Ohridski", Faculte de Physique, 100, 2007

РЕДУКЦИЯ НА УРАВНЕНИЯТА НА ЕДНОДОМЕННИЯ МОДЕЛ ЗА ТЪНКИ МАГНИТНИ СЛОЕВЕ

БОРИСЛАВ ПЕТКОВ

Катедра „Радиофизика и електроника"

Борислав Петков. РЕДУКЦИЯ НА УРАВНЕНИЯТА НА ЕДНОДОМЕННИЯ МОДЕЛ ЗА ТЪНКИ МАГНИТНИ СЛОЕВЕ

В статията се разглеждат методи за математично третиране на задачата за определяне на положението на намагнитеността в тънки магнитни слоеве с едноосна анизотропия в равнината на образците. Анализът се базира на еднодоменния модел на Стонер-Волфарт. Описанието на физичната картина, което моделът дава, води до уравнения от четвърта степен по ъгъла на намагнитване, чието решаване е свързано със сериозни технически затруднения. Намирането на представяния, притежаващи известни симетрии, би било от полза за аналитичното или числено изследване на проблема. Представена е техника за редукция на основното уравнение до кубично. Разгледано е и комплексно представяне, което трансформира зависимостите в удобен вид и би могло да улесни процедурата за решаване .

Borislav Petkov. REDUCTION OF THE MAGNETIZATION EQUATIONS FOR ONE DOMAIN THIN FILMS

Mathematical methods for treatment the problem of the magnetization in thin films with uniaxial anisotropy in the film plane are introduced. The analysis is based on the Stoner-Wohlwarth model for one domain samples. The equations, which it yields, lead to a quatric relation in trigonometric function of the angle of magnetization. That makes finding the exact solutions rather cumbersome. Therefore it is a great deal better to find representations, possessing certain symmetries, which facilitate the considerations. A way to reduce the magnetization angle relation to a cubic equation is shown. Also transformations in complex form are found, making this relation compact and more convenient.

Keywords: thin films, magnetization, magnetic anisotropy
PACS number: 75.70.Ak

1. ВЪВЕДЕНИЕ

Еднодоменният модел на Стонер-Волфарт [1] дава енергетична трактовка на положението на намагнитеността на тънки магнитни слоеве с едноосна анизотропия в равнината на образците. Моделът въвежда ефективно потенциално въздействие (определящо се от кристалната структура), което при липса на външно поле насочва намагнитеността по леката ос на материала. За отклонение от нея на ъгъл φ е необходима енергия

$$E_k = K \sin^2\varphi, \tag{1}$$

наречена енергия на анизотропия, като K е т.нар. константа на анизотропия и е кристалографски параметър на материала на образеца. За тънки слоеве с малка дебелина векторът на намагнитеността остава в равнината на слоя [4]. При прилагане на външно поле $\boldsymbol{H}\,(H_x, H_y)$ посоката на намагнитване ще се определя от минимума на пълната енергия E, която е сума от енергията на взаимодействие с приложеното поле и енергията на анизотропия:

$$E = -\boldsymbol{M_s}\,H + K \sin^2\varphi$$

или (2)

$$E = -\boldsymbol{M_s}\,H \cos(\theta - j) + K \sin^2\varphi,$$

където $\boldsymbol{M_s}$ е намагнитеността на феромагнетика, която се определя от магнитния момент на частиците за единица обем, H и θ са съответно големината на външното поле и ъгълът, който то сключва с леката ос Ox, а φ е ъгълът между вектора на намагнитеността и леката ос.

За да се намери минимумът на пълната енергия, трябва да бъдат изпълнени условията

$$\frac{\partial E}{\partial \varphi} = 0, \tag{3}$$

$$\frac{\partial^2 E}{\partial \varphi^2} > 0. \tag{4}$$

В модела на Stoner-Wohlfarth, приложен за тънки магнитни слоеве [1, 2], е удобно да се работи с безразмерните величини

$$\boldsymbol{h} = \frac{\boldsymbol{H}}{H_k},\; h_x = h\cos\theta,\; h_y = h\sin\theta,\; \boldsymbol{H_k} = \frac{2K}{\boldsymbol{M_s}} \tag{5}$$

като $\boldsymbol{H_k}$ има смисъл на индукцията, причинена от намагнитване с диполен момент $\boldsymbol{M_s}$. Релациите (5) изразяват нормиране на външното поле към параметрите на средата. Тогава уравнение (3) може да се представи като

$$h_y \cos\varphi - h_x \sin\varphi - \sin\varphi \cos\varphi = 0. \tag{6}$$

Графичното решение на уравнение (6) води до построяване на критичната крива за намагнитване на слоя [4]. Решенията на (6) притежават очевидна симетрия относно координатните оси. Затова е достатъчно разглеждането да продължи само за положителни h_x и h_y, т.е. когато векторът на магнитното поле е в I квадрант [3]. Въпреки това, както детайлно е разгледано в [4], поведението на намагнитеността под действието на поле с посока между 0° и 90° спрямо леката ос може да е доста комплицирано. Предварителното качествено изследване на поведението на (6) е необходимо, за да се уточнят условията, на които отговарят реалните корени на уравнението, определящи положението на намагнитеността (ъгълът φ) при зададени компоненти h_x и h_y на магнитното поле.

2. ОСНОВНО УРАВНЕНИЕ

Нека положим $z = \cos\varphi$, при което уравнение (6) добива вида

$$\frac{h_y}{\sqrt{1-z^2}} - \frac{h_x}{z} = 1. \tag{7}$$

След повдигане на втора степен това уравнение може да се запише по различни начини. Вместо подвеждане под общ знаменател е удобно най-напред вторият член да се прехвърли от другата страна на равенството. Тогава след повдигане в квадрат и преобразуване от (7) се получава

$$z^4 + 2h_x z^3 + \left(h_y^2 + h_x^2 - 1\right) z^2 - 2h_x z - h_x^2 0. \tag{8}$$

Следователно при повдигане на втора степен се допуска известна двузначност, така че би трябвало да се провери кои решения на (8) са решения и на уравнение (6). Предварителното изследване на аналитичното поведение на (6) с оглед определяне на броя и разположението на корените му значително би улеснило такава проверка, тъй като част от потенциалните решения ще отпаднат. Без да е принципно необходим за прилагането на разглеждания метод, такъв анализ би бил полезен и за физичното онагледяване на процесите и е подробно направен в [4]. Тук ще споменем най-общо, че в зависимост от външното поле, ако

$$h_x^{2/3} + h_y^{2/3} > 1 \tag{9а}$$

уравнение (6) има един корен, който едновременно удовлетворява и уравнение (4). Той се намира в I квадрант. А ако

$$h_x^{2/3} + h_y^{2/3} < 1 \tag{9б}$$

такива корени има два – по един съответно в I и II квадрант.

В случая (9*а*) има още един корен на уравнение (6) в III квадрант, а в (9*б*) – още два – съответно във II и III квадрант. Те обаче не удовлетворяват условието (4), т.е. не съответстват на минимуми на енергията и затова не се реализират на практика.

Общите процедури за намиране на корените на полинома от 4-та степен в (8) са дълги и съдържат много междинни резултати и разклонения в зависимост от различни условия. Именно затова ограничения, предварително наложени от симетрии или аналитични свойства, могат да се окажат от съществена полза.

3. РЕДУКЦИЯ ДО КУБИЧНО УРАВНЕНИЕ

Методите за решаване на уравнение от четвърта степен обикновено започват с трансформация, която води до освобождаване от члена с третата степен [5]. В случая на уравнение (8) тя се постига чрез полагането

$$z = x - \frac{h_x}{2} \tag{10}$$

То води до

$$x^4 + px^2 + qx + r = 0, \tag{11}$$

в което за p, q и r имаме

$$\begin{aligned} p &= -\frac{1}{2}h_x^2 - 1, \\ q &= -h_x - h_x h_y^2, \\ r &= \frac{1}{16}h_x^2 + \frac{1}{4}h_x^2 + \frac{1}{4}h_x^2 h_y^2. \end{aligned} \tag{12}$$

По-нататък въвеждаме три нови неизвестни y, m и t чрез полагането

$$x = y + m + t. \tag{13}$$

Тогава

$$\begin{aligned} x^2 &= y^2 + m^2 + t^2 + 2(ym + yt + mt), \\ x^4 &= (y^2 + m^2 + t^2)^2 + 4(y^2 + m^2 + t^2)(ym + yt + mt) + \\ &+ 4(y^2m^2 + y^2t^2 + m^2t^2) + 8ymt(y + m + t). \end{aligned} \tag{14}$$

Като се елиминира от тези две равенства изразът ($ym + yt + mt$) и се вземе под внимание полагането (13), се получава връзка между степените на x

$$\begin{aligned} & x^4 - 2(y^2 + m^2 + t^2)x^2 - 8ymt\,x + \\ & + (y^2 + m^2 + t^2)^2 - 4(y^2m^2 + y^2t^2 + m^2t^2) = 0. \end{aligned} \tag{15}$$

Като приравним коефициентите с тези от уравнение (11), се получава

$$\begin{aligned} & y^2 + m^2 + t^2 = -\frac{p}{2}, \\ & ymt = -\frac{q}{8}, \\ & y^2m^2 + y^2t^2 + m^2t^2 = \frac{p^4 - 4r}{16}. \end{aligned} \tag{16}$$

Тези връзки представляват система от три уравнения с три неизвестни, решаването на която показва, че числата y^2, m^2 и t^2 са корени на кубичното уравнение, наречено резолвентно:

$$u^3 + \frac{p}{2}u^2 + \frac{p^2 - 4r}{16}u - \frac{q^2}{64} = 0. \tag{17}$$

Така задачата бе сведена до решаване на уравнение от трета степен, за което е известна формула (на Картан) за намиране на корените в общ вид. Ако означим корените с u_1, u_2 и u_3, то

$$u_1 = y^2, \quad u_2 = m^2, \quad u_3 = t^2. \tag{18}$$

след което се връщаме към първоначалните променливи [3].

След намиране на решенията за (22) и връщане към променливата φ, измежду получените стойности на ъгъла трябва да се подберат тези, които удоволетворяват и условието (4) и са в интервалите, определени от аналитични (или физични) съображения.

4. РЕДУКЦИЯ ЧРЕЗ КОМПЛЕКСНО ПРЕДСТАВЯНЕ

1. Начин да се представи изходното уравнение (6) в по-удобен вид е като се използва комплексното представяне на тригонометричните функции

$$\sin\varphi = \frac{1}{2i}\left(\mathrm{e}^{i\varphi} - \mathrm{e}^{-i\varphi}\right), \quad \cos\varphi = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{i\varphi} + \mathrm{e}^{-i\varphi}\right), \tag{19}$$

или, ако положим $v = \mathrm{e}^{i\varphi}$:

$$\begin{aligned} \cos\varphi &= \frac{1}{2}v + \frac{1}{v}, \\ \sin\varphi &= \frac{1}{2i}v - \frac{1}{v}. \end{aligned} \tag{20}$$

Заместване в (20) в (6) и получаваме

$$v^4 + 2\left(h_x - ih_y\right)v^3 - 2\left(h_x + ih_y\right)v - 1 = 0. \tag{21}$$

Ако въведем комплексния параметър $\omega = h_x + ih_y$, респективно $\bar{\omega} = h_x - ih_y$, уравнение (21) добива вида

$$v^4 + 2\bar{\omega}v^3 - 2\omega v - 1 = 0. \tag{22}$$

Това уравнение има съществено предимство, защото в него не участва квадратичен член по променливата v. Наличието на известна симетрия в определени случаи за параметъра ω също може да улесни решаването му.

Независимо, че след връщане към първоначалната променлива φ тя трябва да бъде реална, в процеса на решаване на (22) не трябва да се държи сметка за това. Стойността на ъгъла φ трябва да се получи реална автоматично и това може да служи като проверка за правилността на решението.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Представените подходи за третиране на енергетичното уравнение при пренамагнитване в тънки еднодоменни образци позволяват задачата да се сведе до точно решима (чрез редукция до уравнение от III степен), или да се получат значително по-ясни на вид зависимости (чрез комплексното представяне). Това значително би облекчило както аналитичните изследвания на функциите, така и методите за числено намиране на решенията, които определят посоката на намагнитване в слоя под въздействието на външно поле.

ЛИТЕРАТУРА

1. Stoner, E. C., E. P. Wohlfarth. *Phil. Trans. Roy. Soc*. **A 248**, 1948, 599.
2. Prutton, M. Thin ferromagnetic films. London, 1964.
3. Petkov, B. *Proceedings of the Bugarian Union of the Scientists – Rousse,* ser. 5, **4**, 2003, 191.
4. Petkov, B. *Annuaire de l'Université de Sofia, Faculté de Physique,* **96**, 2004, 103.
5. Обрешков, Н. Висша алгебра. С., 1961.

Постъпила 2006 г.

Борислав Петков
Софийски университет „Св. Климент Охридски"
Физически факултет
Катедра „Радиофизика и електроника"
Бул. „Дж. Баучър" 5
1164 София, България
E-mail: borsonic@yahoo.com