

ГОДИШНИК НА СОФИЙСКИЯ УНИВЕРСИТЕТ „СВ. КЛИМЕНТ ОХРИДСКИ“
ФИЗИЧЕСКИ ФАКУЛТЕТ, ЮБИЛЕЙНО ИЗДАНИЕ
130 ГОДИНИ СОФИЙСКИ УНИВЕРСИТЕТ
и 55 ГОДИНИ ФИЗИЧЕСКИ ФАКУЛТЕТ
„Нови научни постижения и направления във Физически факултет“

ANNUAL OF SOFIA UNIVERSITY “ST. KLIMENT OHRIDSKI”
FACULTY OF PHYSICS, JUBILEE EDITION
130th ANNIVERSARY OF SOFIA UNIVERSITY
and 55th ANNIVERSARY OF FACULTY OF PHYSICS
“New scientific achievements and directions in the Faculty of Physics”

ПАРАМЕТРИКС НА АДАМАР В ОКОЛНОСТ НА БИФУРКАЦИОНЕН КИЛИНГОВ ХОРИЗОНТ (ВЕЧНА ЧЕРНА ДУПКА)

ПЕТЪР СЛАВОВ

Катедра „Теоретична физика“

Петър Славов. ПАРАМЕТРИКС НА АДАМАР В ОКОЛНОСТ НА БИФУРКАЦИОНЕН КИЛИНГОВ ХОРИЗОНТ (ВЕЧНА ЧЕРНА ДУПКА)

Целта на настоящата работа е да възпроизведе логаритмичната сингулярност в параметрикса на Адамар близо до бифуркационен килингов хоризонт, като използва по-fino приближение на метриката от това, което е достатъчно за възпроизвеждане температурата на Хокинг. Приближение, което може да отчете и ефекти на кривината пространство-времето.

Peter Slavov. HADAMARD PARAMETRIX IN A NEIGHBOURHOOD OF BIFURCATE KILLING HORIZON (ETERNAL BLACK HOLE)

The aim of this paper is to reproduce the logarithmic singularity term in Hadamard parametrix near the bifurcation Killing horizon using a less restrictive approximation for the metric, which not only reproduces the Hawking temperature, but also accounts some effects of curvature.

Keywords: quantum field theory, local quantum physics, black hole, quantum vacuum, Hadamard state

PACS numbers: 04.62.+v, 04.70.-s, 04.70.Dy

За контакти: Петър Славов, Катедра „Теоретична физика“, Физически факултет, Софийски университет „Св. Климент Охридски“, бул. „Джеймс Баучер“ №5, София 1164, тел. 359 2 81-61-670, E-mail: petersl@phys.uni-sofia.bg

1. ВЪВЕДЕНИЕ

Едва ли има област от физиката, която да е толкова далеч от експеримента и толкова интензивно да е дискутирана, както квантовите ефекти, свързани с хоризонти на събитията. Една от причините за това е, че е трудно да се приеме теорията, обясняваща излъчването на атома, радиоактивното разпадане, лембовското отместване, ефектът на Казимир и процесите във физиката на високите енергии, да е просто ефективна теория на микросвета. Друга причина е, че моделни ситуации, свързани с минимални нови допускания, проверяват доколко разбираме основни понятия и принципи, заложи в теорията. Пример за въпрос на повърхността е: как трябва да изглежда квантовата теория на полето (КТП) от гледна точка на неинерциален наблюдател?

Развитието на фундаменталната физика ни учи, че за да сме в състояние да разширим една теория, построена върху плоско пространство, за случай на изкривено такова, трябва да можем лесно да отговаряме на такива въпроси. С други думи тя трябва да е построена ковариантно. За разлика от Общата теория на относителността (ОТО), обичайната КТП на понятийно ниво е силно обвързана със симетриите на пространство-времето. За това способстват успехите в математичната физика с концептуално значение – изграждане теорията на представянията на групата на Поанкаре, теоремата за връзка между спин и статистика, СРТ-теоремата, усвояването на принципа на калибровъчна инвариантност. Парадигмата, наложена от Вигнер и Уайтман, унаследява от квантовата механика не само идеята за некомутиращи наблюдаеми, но също и необходимостта да бъде посочено хилбертовото пространство на теорията, което предполага и задаване на привилегировано понятие за вакуум. В тази връзка моделните ситуации, свързани с разглеждане на случая с неинерциалния наблюдател, водят до алтернативни схеми на квантуване [17]. Една причина трудно да се отговаря на въпроси, които са на повърхността, произлиза от необходимостта основното състояние (вакуумът) да бъде съществена част от аксиоматиката на КТП. В класическата физика това би съответствало на теория, съдържаща привилегирована координатна система или начално условие като част от самата ѝ аксиоматика. От друга страна, вакуум и състояние са нелокални обекти, които пораждаат всички нелокални аспекти на теорията. Всичко това затруднява преосмислянето на стандартната постановка и осъзнаване на пречките в нея.

Когато Нютон е допускал, че точно същата причина, която определя закона за движението на ябълката, определя и характера на движение на планетите, физиката е разполагала с достатъчно наблюдателни данни, за да се потвърди или отхвърли такава една революционна хипотеза. При завършването на ОТО човечеството също е разполагало с наблюдателни данни. Що се отнася до екстраполациите на квантовата теория на полето извън микросвета, като че ли единственото експериментално потвърдено директно следствие е ефектът на

Казимир. Оттам нататък имаме физична общност, навлязла в бурни дискусии около модели без никакво експериментално потвърждение.

Скандалният преди години случай с тахионното неутрино ни показва, че тъпна изобретателни теоретици е напълно способна да предложи втора ръка модели, в които лесно се жертва сърцето на квантовата теория и цялата съвременна физика – принципът на релятивистка причинност, за да се насели овакантена позиция за резултат с историческа значимост. При такава една постмодерна ситуация в науката единственото, което остава там, където няма експеримент, е теорията да бъде продължена по правилата на изкуството да се работи със самосъгласувани понятия, строги резултати и ограничени фантазии.

Формализмът на \star -алгебрите разполага с потенциала за успешна смяна на математичните обекти, съответстващи на основните понятия в цялата квантова физика – *наблюдаема* и *състояние* – по такъв начин, че да се премахне фиксираното хилбертово пространство и същевременно да се остави възможност то да възниква като следствие. Също както в класическата физика, чийто връх е ОТО, изборът на локална координатна или отправна система представя тензорно поле чрез компонентите му, конкретният избор на функционал над \star -алгебра (състояние) задава представяне на алгебричните елементи като оператори, действащи в линейно пространство с неизродено, положително дефинитно скаларно произведение. Факторизационната процедура (известна като *конструкция на Гелфанд–Наймарк–Сигъл*, или кратко – GNS-конструкция) предоставя и елемент, пораждащ цялото линейно пространство (цикличен вектор). Последният може да се мисли като алгебричен аналог на вакуума в КТП, който поражда пространството на възбужданията. В алгебричния подход, благодарение на GNS-конструкцията, „състояние“ и „вакуум“ често се употребяват като синоними. В този смисъл натоварването на алгебричните вакууми с физично съдържание е еквивалентно на посочване на условията, които придават физична значимост на породилото го алгебрично състояние (функционал). Такова посочване е задача от порядъка на построяване на теорията.

Аксиоматичната квантова теория на полето предлага по-дълбоко разбиране на квантовата физика в изкривено пространство-време, отколкото прагматичният подход, базиран на манипулации с формални вакууми на нивото на трансформации на Боголюбов или аналитични продължения. В случая с черна дупка нито формалният вакуум на Крускал се разпознава като самосъгласувано понятие за състояние с физична значимост, нито изведената моделно независима температура, привързана към един планков енергетичен спектър, е асоциирана към едно строго понятие за състояние, описващо термодинамично равновесие.

Разбирането на квантовата физика при наличието на бифуркационен килингов хоризонт предполага разказ за значението и връзката между две основни понятия – *състояние на Кубо–Мартин–Швингер* и *състояние на Адамар*. Причината за това е, че важни понятия, ползвани в КТП

в изкривено пространство, възникват като математични структури още на нивото на динамични системи върху абстрактни \star -алгебри, т.е. при минимални допускания, а доказаните теореми са следствия със съществена физична значимост.

1.1. СЪСТОЯНИЕ НА КУБО–МАРТИН–ШВИНГЕР

Това е пример за типичен продукт на алгебричната парадигма. Той е обобщение на гибсовия ансамбъл за системи с безкраен обем, основано на минимални структури – еднопараметричен автоморфизъм на фоннойманови алгебри с генератор на еволюцията – оператор с положителна норма.

Принципът на локалност на Хааг [25] изработва едно предварително понятие за състояния с физична значимост – т.нар. *локално нормални състояния*. При този ограничен клас от функционали една C^* -алгебра допуска специално GNS-представяне, известно като *алгебра на фон Нойман*. За разлика от общия случай на произволен функционал над \star - или C^* -алгебра, където GNS-факторизацията предлага едно предхилбертово пространство¹, в случая на фоннойманова алгебра тя дава истинско хилбертово пространство.

Известно е, че квантови системите с краен обем, характеризиращи се с температура и описвани чрез гибсов каноничен ансамбъл, удовлетворяват една връзка, позната като условие на Кубо–Мартин–Швингер.

Разглеждайки унитарна еволюция в алгебра на фон Нойман (еднопараметричен алгебричен автоморфизъм) с генератор (хамилтониан), взет като оператор с положителен спектър, Хааг, Хугенхолц и Уинник доказват [24], че инвариантният функционал за такава една абстрактна динамика удовлетворява условието на Кубо–Мартин–Швингер. Доказано е, че система, описвана от такъв функционал (наречен по-късно KMS-функционал, или KMS-състояние), в случая на краен обем се свежда до гибсов каноничен ансамбъл. Доказано е, че KMS-състоянието притежава вътрешното свойство равновесие (устойчивост на малки пертурбации) [23]. Така понятието каноничен ансамбъл на Гибс е обобщено за системи с безкраен обем, т.е. за случаите, в които състоянието не може да се задава с матрица на плътността и съответният хамилтониан не е оператор от следови клас.

KMS-състоянието не използва каквито и да било представи за структура на пространство-времето, взаимодействия и уравнения на движението и единствената му връзка с квантовата физика е некомутативността на алгебрата.

Доказано е, че единствените възможни състояния, описващи термично равновесие, са основното състояние и KMS-състоянията [37].

¹ Липсва пълната метричност.

Поради липсата на статистическа сума, нямаме и статистическо понятие за ентропия за това обобщение. (В алгебричния формализъм се дефинира понятието *относителна ентропия* [1, 2] пак за фоннойманови алгебри.) Това обаче не е пречка да се въведе и докаже свойството *пасивност* [37] – невъзможността да се превърне топлината в работа като единствен резултат от абстрактен цикъл на Карно, моделиран като алгебричен автоморфизъм. Разни аспекти на KMS-състоянието могат да се срещнат в обзора [40]. Наличието на ценни строги резултати на ниво абстрактни динамични системи върху \star -алгебри правят KMS-състоянието една от най-успешните идеализации във физиката.

Непосредствен резултат от строгата дефиниция [3, 39], която ще пропуснем, е нейното представяне чрез фурие интеграл, дадено в [25, (3.11)]. Когато алгебрата се характеризира с комутатор, както е при бозонните полета, на него съответства корелационна функция, описваща KMS-състояние с инверсна температура β :

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall A, B \in \mathcal{A} \\ \alpha_t A := U_{-t} A U_t, \quad \langle A, B \rangle_\beta = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1 - e^{-\beta\omega}} [\alpha_t A, B] e^{i\omega t} d\omega dt. \quad (1.1) \\ U_t := \exp(tH) \end{array} \right.$$

1.2. ВРЪЗКА НА KMS-СЪСТОЯНИЕТО С ГЕОМЕТРИЯТА НА ПРОСТРАНСТВО-ВРЕМЕТО

Квантови полета в клин на Риндлер или във външната област около вечна стационарна черна дупка са примери на системи с безкраен обем.

Ако полето е в основно състояние в пространство на Минковски от гледна точка на един инерциален наблюдател (т.е. то е във вакуум на Минковски), за равноускорен наблюдател², движещ се без въртене, полето се оказва термостат от топлинни кванти с характеристична температура, пропорционална на големината на ускорението при коефициент на пропорционалност фундаментална константа. Квантите могат да се уловят от детектор. Това явление, известно като ефект на Унру [43], се оказва, че има своите строги геометрични предпоставки в контекста на алгебричната парадигма. Бисогняно и Уичман [9] откриват, че действието на групата на изометрии, асоциирана с бустовото поле, поражда един специален автоморфизъм и цикличен вектор, известни като *модуларна структура на Томита–Такезаки* [6].

Изказана е хипотезата, че теоремата на Бисогняно–Уичман може да има отношение към физиката на черните дупки [41]. По-късно е забелязано [25],

² Моделът на наблюдателя не е само неговата мирова линия с тетрада, извършваща преноси на Ферми–Уолкер, но цяло едно разслоение от повърхнини на едновременните събития. За ускорения наблюдател пространствата на едновременните се пресичат в равнина – ръб на Риндлер.

че тази модулarna структура съдържа в себе си KMS-състоянието, с което през 80-те то влиза във фокуса на внимание на по-широк кръг от специалисти по математична физика.

Бифуркационен килингов хоризонт е академичното название на общата геометрична структура, описваща както изкривено пространство-време с вечни черна и бяла дупка, така и пространство на Минковски с равноускорен наблюдател от вечни времена и за вечни времена.

Оказва се, че в изкривено пространство-време с бифуркационен килингов хоризонт са налице предпоставките за обобщение на теоремата на Бисогняно–Уичман [29, 42], което разширява представата за KMS-състоянието като обект, произтичащ от геометричните характеристики на избраната идеализация.

На килинговото векторно поле в стационарната област съответства модулaren оператор, действащ в алгебрата, т. е. ефективен хамилтониан на абстрактна динамична система в KMS-състояние.

Важен релативистки резултат, известен за свободна полева теория, се обобщава като по-го теорема за каква да е локална полева теория над псевдоевклидово пространство-време.

При динамика по направление на пространственоподобен вектор GNS-представянето на KMS-функционала върху мрежа от локални алгебри над псевдоевклидово пространство се оказва комутативна алгебра. [5, Th. 3.2].

1.3. KMS-СЪСТОЯНИЕТО В КОНТЕКСТА НА ЛИНЕЙНА ПОЛЕВА ТЕОРИЯ

Преходът от абстрактни C^* -алгебри към локална квантово-полева теория е нетривиален, тъй като *принципът на локална дефинитност* [25] не допуска понятието *наблюдаема в точка* като алгебричен обект. Свиването на алгебричната наблюдаема в точка води до нейното тривиализиране (единица в алгебрата). Символът $\hat{\phi}(x)$, възприеман от стандартните курсове по КТП като вторично квантувано скаларно поле, т. е. операторнозначна обобщена функция в точка, няма смисъл на локална наблюдаема като елемент от \star -алгебра. За да придобие полето този смисъл, се подлага на процедура на размиване с тест функция ³ $\phi[f] := \int_{\mathbb{R}^4} \phi(x) f(x) d^4x$.

Свободното скаларно поле, както и комутаторната двуточкова функция (функцията на Паули–Йордан) удовлетворяват уравнението на Клайн–Гордън в риманово многообразие

$$\hat{P}_{\mathbf{g}} \mathcal{E}(x; x') = 0, \quad \text{където } \hat{P}_{\mathbf{g}} := g^{\mu\nu} \nabla_{\mu} \nabla_{\nu} - \xi R - m^2. \quad (1.2)$$

Тук ξ е някаква константа, R е скаларът на Ричи за метриката \mathbf{g} , $sgn \mathbf{g} = (-+++)$, а m е масата на полето. Освен (1.2) $\mathcal{E}(x; x')$ удовлетворява още и допълнителни условия на Коши:

$$\text{а) } \mathcal{E}(x; x')|_{x, x' \in \Sigma} = 0, \quad \text{б) } \partial_{\mathbf{n}} \mathcal{E}(x; x')|_{x, x' \in \Sigma} = -\delta^3(x, x'), \quad (1.3)$$

³ Регулярно c -значно разпределение с ограничен носител.

съответстващи на едновременни канонични комутационни съотношения. Тук Σ е пространственоподобна хиперповърхнина, $\partial_{\mathbf{n}}$ е нормалната производна по отношение на единично векторно поле \mathbf{n} , насочено към глобалното бъдеще в една глобална област на Коши, а $\delta^3(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ е функцията на Дирак върху Σ . В глобално хиперболично многообразие съществува единствена закъсняваща/изпреварваща грийнова функция [7]. Единственото решение $\mathcal{E}(\mathbf{x}; \mathbf{x}') = G^{\text{adv}}(\mathbf{x}; \mathbf{x}') - G^{\text{ret}}(\mathbf{x}; \mathbf{x}')$ на задачата на Коши задава един напълно класически обект – *симплектична структура* (неизродена линейна 2-форма) в пространството на тест-функциите.

Първата стъпка в квантуването е съпоставянето на тази симплектична структура една C^* -алгебра, известна като алгебра на Вайл или алгебра на каноничните комутационни съотношения (CCR). (За подробно запознаване [7, 21, 30].)

Когато алгебричните елементи в (1.1) се специализират като свободни ермитови размити квантови полета $A := \phi[f]$, $B := \phi[f']$ над многообразие с поток γ_τ , пораждащ симетрия на квантовата система (автоморфизъм, α_τ запазващ състоянието), изразът (1.1) се трансформира във връзка между комутаторната функция и двуточкова корелационна функция в KMS-състояние с обратна температура β ,

$$\mathcal{W}_\beta(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1 - e^{\beta\omega}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{E}(\gamma_\tau(\mathbf{x}), \mathbf{x}') e^{-i\omega\tau} d\tau d\omega, \quad (1.4)$$

която също е решение на уравнението (1.2).

Макар корелационните функции да не са наблюдаеми в собствения смисъл на думата, те остават основни градивни елементи, характеризиращи теорията.

1.4. СЪСТОЯНИЕ НА АДАМАР

Втората стъпка в квантуването е избирането на адекватно понятие за състояние с физична значимост. То трябва да обобщава някои свойства на вакуума в експериментално проверяемата квантова теория в пространство на Минковски и освен това да бъде построено по такъв начин, че регуляризационните процедури, без които не можем да минем, да бъдат ковариантни и коректни. Такова понятие е *състоянието на Адамар* – състояние, чиято двуточкова корелационна функция представлява елементарно решение на Адамар за уравнението на Клайн–Гордан (1.2) и по двете променливи, т. е. в четиримерно многообразие тя трябва да има вида

$$W_\varrho(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \frac{1}{8\pi^2} \left[\frac{u(\mathbf{x}, \mathbf{x}')}{\sigma_\varepsilon(\mathbf{x}, \mathbf{x}')} + v(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \ln \sigma_\varepsilon(\mathbf{x}, \mathbf{x}') + w_\varrho(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \right]. \quad (1.5)$$

Тук функцията $\sigma(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \text{Re}[\sigma_\varepsilon(\mathbf{x}, \mathbf{x}')] (Synge's world function)$ дава половината от разстоянието по геодезична свързваща точките \mathbf{x} и \mathbf{x}' .

Името идва в чест на бележития френски математик, който, осъзнавайки особената важност на зависещи от разстоянието решения на хиперболични диференциални уравнения, предлага търсенето на тройката регулярни функции чрез представянето им в редове по степени на разстоянието $\sigma := \sigma(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$:

$$u(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \sigma^n, \quad v(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \sigma^n, \quad (1.6)$$

$$w_\varrho(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \sum_{n=0}^{+\infty} w_n(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \sigma^n,$$

с което свежда задачата до решаването на рекурентна система от диференциални уравнения за $\{u_n(\mathbf{x}, \mathbf{x}')\}$, $\{v_n(\mathbf{x}, \mathbf{x}')\}$ и $\{w_n(\mathbf{x}, \mathbf{x}')\}$. Доказана е сходимостта на редовете (1.6) за изпъкнала околност на \mathbf{x}' , в която $\sigma(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ е еднозначна функция. Доказана е симетрията на коефициентите на Адамар в случай на гладко риманово многообразие [33, 34].

Вероятно [12] е първата работа, фокусирана върху елементарните решения на Адамар, както и върху фундаменталните такива, в контекста на корелационни функции за КТП в изкривено пространство-време, като са разписани подробно връзките с геометричните структури.

Присъствието на константата $1/8\pi^2$ е избрано по такъв начин, че условието

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}'} u(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}'} u_0(\mathbf{x}, \mathbf{x}') := 1$$

да нормира (1.5) като уайтманова двуточкова функция

$$W_\varrho : f_1 \otimes f_2 \rightarrow \varrho(\phi[f_1]^* \phi[f_2]) \stackrel{\text{GNS}}{=} \langle \Omega_\varrho | \widehat{\phi}[f_1] \widehat{\phi}[f_2] | \Omega_\varrho \rangle \quad \widehat{\phi}[f] := \pi_\varrho \phi[f].$$

Функцията $u(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ има напълно геометрична природа, свързана с главния символ на линейния диференциален оператор (метриката на пространство-времето). Нейният експлицитен вид е изведен в [12]:

$$u(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \sqrt{\Delta(\mathbf{x}, \mathbf{x}')} , \quad \Delta(\mathbf{x}, \mathbf{x}') := \sqrt{-g(x)} \det \|\partial_\mu \partial_{\nu'} \sigma(\mathbf{x}, \mathbf{x}')\| \sqrt{-g(x')} .$$

За малки стойности на σ е удобна добре известна формула в термини на кривина:

$$\Delta(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = 1 + \frac{1}{6} R^{\mu\nu} \sigma_{,\mu} \sigma_{,\nu} + O(\sigma^3) \Rightarrow u(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \approx 1 + \frac{1}{12} R^{\mu\nu} \sigma_{,\mu} \sigma_{,\nu}, \quad \sigma \ll 1.$$

Функцията $v(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ отразява свойства от опашката на диференциалния оператор. Следвайки [12], лесно може да се покаже, че

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}'} v_0(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \frac{1}{2} \left[m^2 + \left(\xi - \frac{1}{6} \right) R(\mathbf{x}') \right]. \quad (1.7)$$

Нашата конвенция за тензорите на Риман и Ричи е: $R_{\gamma\alpha\beta}^{\delta} := \Gamma_{\gamma[\beta,\alpha]}^{\delta} + [\Gamma_{\alpha}, \Gamma_{\beta}]_{\gamma}^{\delta}$, $R_{\gamma\beta} := R_{\gamma\alpha\beta}^{\alpha}$, което съответства на положителна кривина за \mathbb{S}^2 , вложено в евклидово \mathbb{R}^3 . В [12] метричната сигнатура е същата. При символното съответствие $\Gamma_{\gamma\alpha}^{\delta} := \Gamma_{\gamma\alpha}^{\delta}$ и $R_{\gamma\alpha\beta}^{\delta} := R_{\alpha\beta\gamma}^{\delta}$ конвенцията за риманов тензор [12, (1.24)] също е такава, но за тензора на Ричи [12, (1.77)] е взета противоположната.

Любопитното тук е, че за безмасово скаларно поле, описвано от конформно-инвариантното уравнение на Клайн–Гордън ($\xi = 1/6$), логаритмичната сингулярност изчезва.

Произволът в нормираното решение на Адамар е във функцията $w_{\varrho}(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ ($w_0(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ остава напълно неопределена). Ето защо цялата зависеща от състоянието ϱ информация се съдържа в несингулярния член в (1.5), което сме отбелязали с индекс.

Когато заменим редовете (1.6) с крайни суми, приближеното решение, известно като *параметрикс* на Адамар (*Hadamard parametrix*), се оказва достатъчно за построяването на ковариантни самосъгласувани математични структури – нормално и хронологично произведение.

Както отбелязва Верх [44], пълна удовлетворителна дефиниция на състояние на Адамар е дадена за пръв път от Кай и Уолд [31]. При наличие на глобална времева координата $T := T(\mathbf{x})$ и избор на регуляризация $\sigma_{\varepsilon}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') := \sigma(\mathbf{x}, \mathbf{x}') + i(T - T')\varepsilon$, $\varepsilon > 0$, $T' := T(\mathbf{x}')$ [22] се получават същите връзки между различните двучковни функции, както известните ни от курса по КТП в пространство на Минковски:

$$W_{\varrho}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = W_{\varrho}^S(\mathbf{x}, \mathbf{x}') + \frac{i}{2}\mathcal{E}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \quad \wedge \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\sigma \pm i0_+} = \frac{1}{\sigma} \mp i\pi\delta(\sigma) \\ \ln(\sigma \pm i0_+) = \ln|\sigma| \pm \pi\Theta(-\sigma) \end{array} \right. \quad \text{[4],}$$

$$W_{\varrho}^S(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \frac{1}{8\pi^2} \left[\frac{\sqrt{\Delta(\mathbf{x}, \mathbf{x}')}}{\sigma(\mathbf{x}, \mathbf{x}')} + v(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \ln|\sigma(\mathbf{x}, \mathbf{x}')| + w_{\varrho}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \right],$$

$$\mathcal{E}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \frac{\varepsilon(T - T')}{4\pi} \left[-\sqrt{\Delta(\mathbf{x}, \mathbf{x}')}\delta(\sigma(\mathbf{x}, \mathbf{x}')) + v(\mathbf{x}, \mathbf{x}')\Theta(-\sigma(\mathbf{x}, \mathbf{x}')) \right].$$

Единствеността на $\mathcal{E}(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ демонстрира независимостта на $v(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ от избора на състоянието. Горните формули ни дават функциите на Грийн:

$$\begin{aligned} G^{\text{ret}}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') &= G^{\text{adv}}(\mathbf{x}', \mathbf{x}) := -\Theta(T - T')\mathcal{E}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \\ &= \frac{\Theta(T - T')}{4\pi} \left[\sqrt{\Delta(\mathbf{x}, \mathbf{x}')}\delta(\sigma(\mathbf{x}, \mathbf{x}')) - v(\mathbf{x}, \mathbf{x}')\Theta(-\sigma(\mathbf{x}, \mathbf{x}')) \right] \quad \text{[5],} \end{aligned}$$

^[4] $\Theta(-\sigma)$ е стъпалчеста функция на Хевисайд. $\varepsilon(T - T') := \Theta(T - T') - \Theta(T' - T)$.

^[5] При сигнатура $(-+++)$ всички функции на Грийн са решения на уравнението $\hat{P}_{\mathbf{g}}G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = -\delta^4(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$.

$$G_{\rho}^F(\mathbf{x}, \mathbf{x}') := i [\Theta(T-T')W_{\rho}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') + \Theta(T'-T)W_{\rho}(\mathbf{x}', \mathbf{x})] \equiv \\ \equiv iW_{\rho}^S(\mathbf{x}, \mathbf{x}') + \frac{1}{2}(G^{\text{ret}}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') + G^{\text{adv}}(\mathbf{x}, \mathbf{x}')).$$

Последната връзка всъщност е умноженият по i израз (1.5) при регуляризация $\sigma_{\varepsilon}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \sigma(\mathbf{x}, \mathbf{x}') + i\varepsilon$.

Състоянието на Адамар е утвърдено понятие в аксиоматиката на линейна полева теория [30]. То влиза в състава на точкоразцепващите предписания, конструиращи наблюдаеми в точка (pointwise observables), като гарантира коректност на регуляризационната процедура. Основни наблюдаеми в точка са квадратът на Вик на квантовото поле, чрез който се въвежда локално понятие за температура [11], и квантовият тензор на енергията и импулса [35], чрез който отчитаме обратната реакция (влиянieto на квантовото поле върху кривината на пространство-времето) при излъчване на Хокинг. Въпросът за регулярността на тензора на енергията и импулса в определено място от пространство-времето се свежда до въпрос за продължение на двуточкова функция от адамаров тип до съответното място. Но не само в тези случаи, а и за всички *полиноми на Вик*, се получават крайни флуктуации в състояние на Адамар [21], с което всички усилия за доказване на регуляризуемост на редица квантови наблюдаеми в точка са пренасочени от изпробване на различни регуляризационни схеми, много от които са със съмнителна самосъгласуваност, към изследване съществуването на глобално решение на Адамар с евентуалните допълнителните свойства, специфични за конкретния физичен модел.

За масивно скаларно поле е доказано съществуване на състояние на Адамар за широк клас от метрики [18, 19].

Нов етап в развитието на КТП в изкривено пространство-време е доказването, че състоянието на Адамар може да бъде характеризирано от съвкупността от вълнови фронтове (wave front set) [38], което е аналогът на фурие трансформацията в пространство на Минковски. Това позволява да бъде въведено *микролокално спектрално условие* в качеството на обобщение на уайтмановото спектрално условие в пространство на Минковски [8]. Микролокалният анализ е надеждата за построяване на пертурбативна квантова теория на взаимодействащи полета в изкривено пространство-време. Уайтман още в края 60-те е осъзнал важността на микролокалната характеристика на корелационните функции. Прелюбопитна случка, разказана от Уолд в краткия исторически обзор [45, стр. 12], обяснява защо резултатите са закъснели с цели двадесет години.

Състоянието на Адамар се обобщава за спинорни [28], векторни и тензорни полета [22].

Поради нестрогост на понятията и необходимост от допълнителни разглеждания [14, 15, 20] знаменитата работа на Хокинг [26] се счита евристична [30]. С методите на микролокалния анализ и (bulk-boundary) реконструкции на решението съвсем неотдавна е доказано, че състоянието, описващо

процеса на хокингово излъчване за шварцшилдов тип черна дупка, има свойствата на глобално решение на Адамар [16]. В доказателството съществено се използва, че многообразието е асимптотично плоско. Асимптотично неплоския случай остава неизяснен.

Едно нашумяло поднаправление във фундаменталната физика е развиването на концепцията за хоризонта като холографска повърхнина, огнена стена (енергетично перде), върху която са разположени всичките краен брой степени на свобода на полето. Това трябва да определя и ентропията на черна дупка. Работещите в аксиоматичната КТП не без основание се отнасят скептично към това начинание. Състоянието на Адамар гарантира наличието на устойчива мащабна граница на теорията, която пък определя локалните фоннойманови алгебри да бъдат *фактор III*. Firewall моделите налагат условия, сменящи фактора на алгебрата на I, което лишава теорията от мащабна граница [21]. От друга страна, се очаква устойчивата мащабна граница да съответства на теория, допускаща *ултравиолетова пренормировъчна група с фиксирана точка* [21].

1.5. ВРЪЗКА МЕЖДУ KMS-СЪСТОЯНИЕ И СЪСТОЯНИЕ НА АДАМАР

Аксиоматичната КТП предлага оригинално третиране на температурите на Унру и Хокинг [25], изхождайки от първи принципи: *принцип на локалната дефинитност* и *принцип на локалната устойчивост*. Първият принцип задава общата алгебрична рамка – мрежа от локални фоннойманови алгебри, породена от множество локално нормални състояния.

В изкривено пространство-време n -точковите корелационни функции се третират като разпределения не само с носител в многообразието, но и с носител в котангенциалното (импулсното) пространство над всяка точка. Принципът за локалната устойчивост е наложено ограничение за носителя в котангенциалното пространство, като за двуточковата функция той е върху предния изотропен конус. Това е точно микролокалното спектрално условие, което заменя условието за положителност на енергията в пространство на Минковски. Следствие от него е наличието на *мащабна граница* на теорията – на всяка n -точкова корелационна функция съответства мащабен множител. (Тъй като корелационните функции възстановяват алгебрата, то те задават теорията.) Принципът на локалната устойчивост е специфика на линейните полеви теории. Съществуват контрапримери, например ϕ^3 теории, които не го удовлетворяват [27]. Масщабната граница за двуточковата функция се оказва свойство на водещата сингулярност в решението на Адамар (1.5).

Как се възпроизвеждат температурите при наличие на бифуркационен килингов хоризонт. Конструира се KMS-корелационна функция за причинно свързаната статична област. Право за това ни дава присъщата на идеализацията модулarna структура. Едната точка се изтегля върху бифуркационната повърхнина, а другата остава в малка околност на нея. Като се ползва рецептата

за мащабна граница, се получава, че всички двуточкови KMS-корелационни функции в околност на точка от бифуркационната повърхнина (ръб на Риндлер, бифуркационна сфера) имат водеща сингулярност като на решение на Адамар, но само една от тях има правилната нормировка. Условието за фиксирани на нормировката дава връзката между температура и повърхнинна гравитация $\beta = 2\pi/\varkappa$. Универсалният характер на температурата се дължи на факта, че мащабният граничен преход заличава информацията за маса в корелационната функция. Съществена методологична стойност на този подход представлява производът на планковия множител извън контекста на линейната полева теория. Той се унаследява от пригоденото към абстрактна алгебра, характеризирани от комутатор, следствие (1.1) от дефиницията на KMS-състояние. По тази причина, ако разглеждаме спинорно квантово поле в клин на Риндлер или около вечна черна дупка, без да ползваме уравнението на Дирак и трансформации на Боголюбов, можем да отгатнем, че енергетичният спектър ще бъде като на термостат от фермиони, тъй като замяната на комутатора с антикомутатор във формула (1.1) изисква смяна на знака пред $e^{-\beta\omega}$, за да бъде в съответствие с дефиницията за KMS-корелационна функция в термини на интеграл на Фурие.

Нестрогийят подход на формалните вакууми извежда само температурата и планковия спектър, но не може да каже нищо за свойствата на корелационната функция. Планковият спектър се възпроизвежда изцяло чрез структури на линейна полева теория – нормирани моди и оператори на раждане и унищожение. В околност на хоризонта се взема най-грубото приближение за уравнението на движение – нулеви ефективни потенциали в каноничния му (Шрьодингеров) вид (2.3в), което дава двумерно хомогенно вълново уравнение в каноничен вид, както в координати на Едингтън–Финкелщайн u, v , така и в изотропни координати на Крускал U, V ⁶:

$$\left| \begin{array}{l} u := t - r_* \\ v := t + r_* \end{array} \right. \quad \partial_u \partial_v \psi(u, v) = 0 \rightarrow \underbrace{\{e^{-i\omega u}, e^{-i\omega v}, e^{i\omega u}, e^{i\omega v}\}}_{\text{ненормирани нормални моди}},$$

$$\left| \begin{array}{l} U = -\varkappa^{-1} e^{\varkappa u} \\ V = \varkappa^{-1} e^{-\varkappa v} \end{array} \right. \quad \partial_U \partial_V \Phi(U, V) = 0 \rightarrow \underbrace{\{e^{-i\omega U}, e^{-i\omega V}, e^{i\omega U}, e^{i\omega V}\}}_{\text{ненормирани моди на Крускал}}.$$

В тези асимптотични решения липсата на информация за маса и индекс на момента на импулса l е причина трансформациите на Боголюбов да дават моделно независима температура.

На нивото на разбиране, основано на боравенето с нееквивалентни вакууми, може да се каже, че вакуумът на Крускал *изглежда като* термично състояние спрямо вакуума, асоцииран с нормалните моди в стационарната

⁶ В пространство на Минковски, разглеждано като аналитично разширение на клин на Риндлер, аналог на глобалните координати на Крускал са лоренцовите координати.

област на пространство-времето (вакуум на Булвар), и това е всъщност състоянието на Хартъл–Хокинг. Без свойствата равновесие и пасивност единственият атрибут на термичност – планковият енергетичен спектър – е по аналогия с равновесно излъчване на нагрятото тяло.

Аксиоматичната КТП ни завещава една дефиниция, която вместо в термини на нееквивалентни вакууми се дава в термини на рестрикция (ограничение) на състоянието.

Дефиниция: KMS-състоянието, което възниква при рестрикцията на изометрично инвариантно¹⁷ състояние на Адамар в причинно свързаната стационарна област от пространство-време с компактен бифуркационен килингов хоризонт, се нарича състояние на Хартъл–Хокинг, а неговата характеристична температура – температура на Хокинг.

Това понятие няма отношение към процеса на изпарение на черна дупка. Възникването на черната дупка, независимо дали от гравитационен колапс или по космологични причини, внася необратимост във времето. Хоризонтът не е бифуркационен, диаграмите на Каргър–Пенроуз са други и въпреки че асимптотичната симетрия локално ни изглежда като точна, липсата на отражение по времето е като предистория, от която не можем да се отървем. Модуларната структура е невъзможна най-малко поради липса на отражение във времето, което да ни даде модуларно спрягане. Също така без стационарност не ни е гарантирано *свойството на Pee и Шлидер на вакуума*. Всичко това прави невъзможно описанието на процеса на изпарение в термини на KMS-състояние. Изпарението е *квазиравновесен* процес.

Една причина аксиоматичният подход да изведе не само температурата и съответния ѝ спектър, но и вида на водещата сингулярност, е, че работата с корелационни функции изисква по-добро приближение в околност на хоризонта, отколкото елементарните вълни. Ползването на точно решение при най-грубото приближение за метриката в околност на бифуркационната сфера (3.2) се оказва по-добро, отколкото асимптотичното решение на точното уравнение. Действително, в този случай имаме модифицирано уравнение на Бесел, което съответства на апроксимация на точните ефективни потенциали в канонизираното уравнение (2.3в) с функции $V_l(r_*) = q_l^2 \exp(2\chi r_*)$ вместо зануляването им. За нормалните моди с много ниски честоти коефициентът на отражение от ефективната потенциална бариера е близък до 1 и замяната на началото на бариерата с нарастваща експонента се оказва достатъчно добро.

Целта на нашето занятие е, като използваме по-уточнен вид на метриката от този в [25], да се опитаме да възпроизведем и (1.7), конструирайки KMS-корелационна функция за ермитово скаларно поле в статичната област на сферичносиметрично пространство-време.

Преди да преминем към конкретната ни цел, ще споменем един фундаментален резултат, свързан със сигнатурата на метриката, предлагащ допълнителен критерий за физичната различимост на време и пространство

¹⁷ Пропускаме „глобално”, понеже е част от дефиницията на състояние на Адамар.

в контекста на връзката между KMS-състоянието и състоянието на Адамар. Може ли да разглеждаме KMS-състояние при динамика по направление на пространственоподобна крива? Можем ли да използваме формулата (1.4) за такъв случай?

Съвсем скорозна работа, базирана на средствата на микролокалния анализ, доказва, че микролокалните свойства на KMS-функционала в този случай са несъвместими с микролокалното спектрално условие (μSC) на Адамар [36]. Така твърдението, че *каквото и да било състояние на равновесие за квантово поле зад хоризонта на събитията на статична черна/бяла дупка, както и зад ергосферата на гравитационно решение от типа на Кер, е невъзможно*, се оказва частен случай на по-общ резултат, произлизащ от структурата на локална квантова теория на полето.

2. КОНСТРУКЦИЯ

Всяко статично сферично-симетрично решение може да бъде представено във вида

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + f(r)^{-1}dr^2 + h(r)d\Omega^2. \quad (2.1a)$$

Тук $f(r)$ и $h(r)$ са аналитични функции, където $h(r) > 0$ за всички $r > 0$, като за стойности $r > r_+$ $f(r) > 0$. Така зададените метрики съдържат бифуркационен килингов хоризонт, ако $f(r_+) = 0$ и в същото време $f'(r_+) \neq 0$. Ще използваме означението $\varkappa := f'(r_+)/2$, тъй като последното е частен случай на ковариантната формула за популярното в гравитационната физика понятие – *повърхнинна гравитация* [31, с.58-59].

Премаинавайки от изходната радиална променлива към геодезична $r \rightarrow \rho$, метриката придобива вида

$$d\rho = \frac{dr}{\sqrt{f(r)}} \Rightarrow \rho := \int_{r_+}^r \frac{d\tilde{r}}{\sqrt{f(\tilde{r})}} \Rightarrow ds^2 = -F(\rho)dt^2 + d\rho^2 + H(\rho)d\Omega^2. \quad (2.1b)$$

$$\begin{aligned} F(\rho) &= f(r), & H(\rho) &= h(r), \\ F'(\rho) &= \sqrt{f(r)}f'(r), & H'(\rho) &= \sqrt{f(r)}h'(r), \\ F''(\rho) &= \frac{1}{2}f'(r)^2 + f(r)f''(r), & H''(\rho) &= \frac{1}{2}f'(r)h'(r) + f(r)h''(r). \end{aligned} \quad (2.2)$$

Симетрията на метриката (2.1) разделя променливите в оператора на Клайн–Гордън (1.2)

$$\hat{P}_{\mathbf{g}} = \frac{1}{g_{00}}\partial_t^2 + \frac{1}{\sqrt{-g_{00}g_{11}g_{22}}}\partial_{x^1}\sqrt{\frac{-g_{00}}{g_{11}}}g_{22}\partial_{x^1} + \frac{1}{g_{22}}\nabla_{\mathbb{S}^2}^2 + \xi R(x^1) + m^2,$$

което свежда уравненията на движение до уравнения за радиалните амплитуди на всяко частно решение

$$\Phi_{\omega lm}(r, \theta, \phi) = R_l(r, \omega)Y_{lm}(\theta, \phi)e^{-i\omega t} :$$

$$\left[\frac{1}{h(r)} \partial_r (h(r) f(r) \partial_r) + \frac{\omega^2}{f(r)} - \frac{l(l+1)}{h(r)} - \xi R(r) - m^2 \right] R_l(r, \omega) = 0, \quad (2.3a)$$

$$\left[\partial_\rho^2 + \left(\frac{1}{2} \frac{F'(\rho)}{F(\rho)} + \frac{H'(\rho)}{H(\rho)} \right) \partial_\rho + \frac{\omega^2}{F(\rho)} - \frac{l(l+1)}{H(\rho)} - \xi R(\rho) - m^2 \right] \mathcal{R}_l(\rho, \omega) = 0. \quad (2.3b)$$

В радиалните уравнения хоризонтът присъства като отстранима особена точка.

Трансформацията на Лиувил обръща уравнението (2.3) в каноничната форма⁸

$$[\partial_{r_*}^2 + \omega^2 - V_l(r_*)] \psi_l(r_*, \omega) = 0, \quad \text{където } dr_* = \frac{dr}{f(r)} = \frac{d\rho}{\sqrt{F(\rho)}}. \quad (2.3в)$$

Така всяка собствена функция $R_l(r, \omega)$ ($\mathcal{R}_l(\rho, \omega)$) се изобразява в собствена функция $\psi_l(r_*, \omega)$ чрез връзката

$$\psi_l(r_*, \omega) = \sqrt{h(r)} R_l(r, \omega) = \sqrt{H(\rho)} \mathcal{R}_l(\rho, \omega). \quad (2.4)$$

В изразите за потенциалите, разписани в изходни, геодезични и костенуркови координати, сме групирани част от членовете като компоненти на тензора на Ричи⁹, за да предложим съкратени формули за случаите на Ричи плоски метрики, а също така да отчетем, че в нашето приближение R_0^0 и R_1^1 са константи.

$$V_l(r) = f(r) \left[m^2 + \frac{l(l+1)}{h(r)} - \frac{f''(r)}{2} + \xi R(r) - \frac{1}{2} (R_0^0(r) + R_1^1(r)) \right] \quad (2.5a)$$

$$V_l(\rho) = F(\rho) \left[m^2 + \frac{l(l+1)}{H(\rho)} - \underbrace{\frac{1}{2} \frac{F''(\rho)}{F(\rho)} + \frac{1}{4} \frac{F'(\rho)^2}{F(\rho)^2}}_{-f''(r)/2} + \xi R(\rho) - \frac{1}{2} (R_0^0(\rho) + R_1^1(\rho)) \right] \quad (2.5b)$$

$$V_{*l} := V_l(r(r_*)) = F_* \left[\frac{l(l+1)}{H_*} + m^2 - \underbrace{\frac{F_*''}{2F_*^2} + \frac{F_*'^2}{2F_*^3}}_{-f''(r)/2} + \xi R_* - \frac{1}{2} (R_{*0}^0 + R_{*1}^1) \right] \quad (2.5в)$$

⁸ Това става на три стъпки: Определяме диференциалния оператор, като разглеждаме (2.3аб) като уравнение за собствени стойности $-\omega^2$. Сменяме променливата така, че висшата производна да не е умножена с функция. Сменяме функцията, за да се освободим от първата производна, като използваме (3.6) при $A = 1$, $\tilde{B} = 0$.

⁹ При смяната на радиалната променлива тези компоненти се преобразуват като скалари.

¹⁰ * означава функции от костенурковата променлива r_* .

Тъй като всички членове в скобите в (2.5абв) са ограничени функции, в сила е следното твърдение:

Свойство 1 на хоризонта: За всички метрики (2.1) ефективните потенциали имат асимптотика $\lim_{r_* \rightarrow -\infty} V_l(r_*) = 0$.

Това води до заличаване на информацията за маса и момент на импулса върху хоризонта и е в основата на моделната независимост на температурата.

Също така координатната скорост на вълната в променливи r_* до хоризонта е $dr_*/dt \approx 1$, докато връзката (2.3в) ни дава за действителната скорост от $d\rho/dt = \sqrt{F(\rho)} \approx 0$. Затова r_* е известна като *костенуркова координата*.

Поради симетриите можем да търсим комутаторната функция в разделени променливи:

$$\mathcal{E}(t, \rho, \vec{\Omega}; t', \rho', \vec{\Omega}') = \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{2l+1}{4\pi} P_l(\vec{\Omega} \cdot \vec{\Omega}') \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{E}_l(\rho, \rho'; \omega) e^{-i\omega(t-t')} d\omega, \quad (2.6)$$

където $P_l(\Omega \cdot \Omega')$ са полиномите на Лъожандр, а $\vec{\Omega}$ и $\vec{\Omega}'$ са единични вектори, съответстващи на точки от сферата \mathbb{S}^2 ($\vec{\Omega}(\theta, \phi) := (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta)$).

Заместваме вида (2.6) на функцията на Паули–Йордан в (1.4) и след интегриране по t и по ω получаваме в аналогичен вид двуточковата функция в KMS-състояние с инверсна температура β

$$\mathcal{W}_\beta(t, \rho, \vec{\Omega}; t', \rho', \vec{\Omega}') = i \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{2l+1}{4\pi} P_l(\vec{\Omega} \cdot \vec{\Omega}') \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathcal{E}_l(\rho, \rho'; \omega)}{1 - e^{-\beta\omega}} e^{-i\omega(t-t')} d\omega. \quad (2.7)$$

Симетричната ѝ част съдържа цялата зависеща от състоянието информация:

$$\mathcal{W}_\beta^S(t, \rho, \vec{\Omega}; t', \rho', \vec{\Omega}') = i \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{2l+1}{4\pi} P_l(\vec{\Omega} \cdot \vec{\Omega}') \int_0^{+\infty} \mathcal{E}_l(\rho, \rho'; \omega) \operatorname{cth} \frac{\beta\omega}{2} \cos \omega(t-t') d\omega. \quad (2.8)$$

Свойство 2 на хоризонта: Когато поставим точката x' върху бифуркационната повърхнина, само нулевите моди имат принос в KMS-корелационната функция.

Това свойство е следствие от предишното.

Когато частните решения на (2.3б) са избрани така, че съответните решения $\psi_l(r_*, \omega)$ на (2.3в) да имат асимптотика към хоризонта $e^{i\omega r_*}$, тогава е в сила връзката

$$\psi_l(r_*, -\omega) = \psi_l(r_*, \omega)^* \xrightarrow{(2.4)} \mathcal{R}_l(\rho, -\omega) = \mathcal{R}_l(\rho, \omega)^*. \quad (2.9)$$

Задачата на Коши за комутаторната функция при разделени променливи (2.6) определя нейните радиални части като решение на уравнението (2.3б) при допълнителни условия. Резултатът, изведен в апендикса, е следният:

$$\mathcal{E}_l(\rho, \rho'; \omega) = \frac{1}{2\pi\omega i} \operatorname{Re}[\tilde{\mathcal{R}}_l(\rho, \omega)^* \mathcal{R}_l(\rho, \omega)] = \frac{1}{2\pi\omega i} \operatorname{Re}[\tilde{\mathcal{R}}_l(\rho, \omega) \mathcal{R}_l(\rho', \omega)^*],$$

$$\tilde{\mathcal{R}}_l(\rho, \omega) := \begin{cases} \sqrt{H(\rho)} \mathcal{R}_l(\rho, \omega) := \psi_l(r_*, \omega) \\ \text{за } \rho \approx 0 \ (r_* \rightarrow -\infty) \ \psi_l(r_*, \omega) \approx e^{i\omega r_*} \\ s_l(-\omega) = s_l(\omega)^* \ \wedge \ s_l(0) = -1 \end{cases} .$$

Коефициентите $s_l(\omega)$ в линейните комбинации обезпечават решенията $\tilde{\mathcal{R}}_l(\rho, \omega)$ да не са бързорастящи при големи стойности на ρ (т.е. да са S-клас обобщени функции) в случаите, когато $\mathcal{R}_l(\rho, \omega)$ са бързорастящи.

Когато поставим точката x' върху бифуркационната сфера, тогава

$$\lim_{\rho' \rightarrow 0} \frac{\mathcal{R}_l(\rho', \omega)^*}{\omega} = \frac{-i}{\sqrt{H}} \lim_{r_*' \rightarrow -\infty} \frac{e^{-i\omega r_*'}}{i\omega} = \frac{-i\pi}{\sqrt{H}} \delta(\omega),$$

$$\operatorname{cth} \frac{\beta\omega}{2} \mathcal{E}_l(\rho, 0; \omega) = \frac{i\delta(\omega)}{\beta\sqrt{H}} \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{\operatorname{Im}[\tilde{\mathcal{R}}_l(\rho, \omega)]}{\omega},$$

$$\xrightarrow{(2.8)} \mathcal{W}_\beta^S(*, \rho, \vec{\Omega}; *, 0, \vec{\Omega}') = \frac{-1}{2\beta\sqrt{H}} \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{2l+1}{4\pi} P_l(\vec{\Omega} \cdot \vec{\Omega}') \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{\operatorname{Im}[\tilde{\mathcal{R}}_l(\rho, \omega)]}{\omega}. \quad (2.10)$$

Ще подчертаем, че (2.10) е точно решение на (2.3б).

3. ПРИБЛИЖЕНИЯ В ОКОЛНОСТ НА БИФУРКАЦИОННАТА СФЕРА

Предвид (2.2) върху бифуркационната сфера $r = r_+$ ($\rho = 0$) ще имаме връзките

$$\begin{aligned} F(0) = f(r_+) = 0, \quad H(0) = h(r_+) := H, \\ F'(0) = F'''(0) = 0, \quad H'(0) = 0, \\ F''(0) = 2\kappa^2, \quad H''(0) = \kappa b, \\ F^{IV}(0) = 4\kappa^2 a, \end{aligned} \quad \text{където} \quad \begin{cases} a := f''(r_+) \\ b := h'(r_+) \end{cases} . \quad (3.1)$$

Константата $4\pi H$ всъщност е площта на бифуркационната сфера.

Ако разглеждаме малка околност $\mathcal{O}_{x'}$ (от стационарната област) около точка от бифуркационната сфера $x' \in \mathbb{S}^2$, в най-простото приближение,

$$F(\rho) \approx \kappa^2 \rho^2, \quad H(\rho) \approx H \quad \Rightarrow \quad ds^2 = -\kappa^2 \rho^2 dt^2 + d\rho^2 + H d\Omega^2, \quad (3.2)$$

всеки ще види подобие с метриката на Минковски в клин на Риндлер при съответните му стандартни координати:

$$\text{Rindler wedge} \quad \longrightarrow \quad ds^2 = -\alpha^2 Z^2 d\tau^2 + dZ^2 + dx^2 + dy^2, \quad (3.3)$$

където $\alpha = |\nabla_{\dot{\gamma}_\tau} \dot{\gamma}_\tau|$ е големината на ускорението на наблюдател, идентифициран с мирова линия $\{\gamma_\tau : d\tau^2 = -ds^2\}$ на фиксирано разстояние Z от бифуркационната равнина. (Нищо не пречи α да се счита за повърхнинна гравитация за ефективния хоризонт.) Приближение (3.2) е достатъчно за възпроизвеждане на водещата сингулярност в KMS-корелационната функция [25].

За да възпроизведем логаритмичната сингулярност в общия случай на (1.7), приближението (3.2) няма да е достатъчно, тъй като не може да опише кривина дори само в точката от бифуркационната сфера. Тензорът на Ричи и скаларната кривина за метриката (2.1) в този случай ($\rho = 0$) се задава от \varkappa , H и въведените в (3.1) още две константи:

$$R_0^0 = R_1^1 = -\frac{a}{2} - \frac{\varkappa b}{H}, \quad R_2^2 = R_3^3 = \frac{1 - \varkappa b}{H} \quad \Rightarrow \quad R = -a + \frac{2 - 4\varkappa b}{H}. \quad (3.4)$$

Следователно минималното приближение, съвместимо с константна скаларна кривина R в малката околност $\mathcal{O}_{x'}$, изисква метриката да има следния приближен вид:

$$f(r) \approx 2\varkappa(r - r_+) + \frac{a}{2}(r - r_+)^2, \quad h(r) \approx H + b(r - r_+) \quad (3.5a)$$

или

$$F(\rho) \approx \varkappa^2 \rho^2 + \frac{1}{6} \varkappa^2 a \rho^4, \quad H(\rho) \approx H + \frac{1}{2} \varkappa b \rho^2. \quad (3.5b)$$

В изходните координати приближение (3.5a) дава решение на уравнението (2.3a), което е представимо в Neun-G клас функции. Тъй като последните са неудобни за работа поради значителна сложност, ще преминем към приближенията (3.5b) за (2.3б), като се ограничаваме само със случая $\omega = 0$.

Умножаваме (2.3б) по $\tilde{H}(\rho) := H(\rho)/H$, тъй като не би било коректно приближение, в което параметър, считан за малък, се умножава с нефиксиран параметър (в случая $l(l+1)$), който може да приема произволно големи стойности.

$$\left[\tilde{H}(\rho) \partial_\rho^2 + \left(\frac{1}{2} \tilde{H}(\rho) \frac{F'(\rho)}{F(\rho)} + \tilde{H}'(\rho) \right) \partial_\rho - \frac{l(l+1)}{H} - \tilde{H}(\rho)(\xi R(\rho) + m^2) \right] \mathcal{R}_l(\rho, 0) = 0$$

Заради това сменяме и променливата, и функцията:

$$\rho_*(\rho) := \int_0^\rho \frac{dx}{\sqrt{\tilde{H}(x)}} \quad \Rightarrow \quad \partial_{\rho_*} = \sqrt{\tilde{H}(\rho)} \partial_\rho, \quad \mathcal{R}_l(\rho, 0) := Q(\rho_*) X_l(\rho_*),$$

$$\left[\partial_{\rho_*}^2 + \frac{d \ln(F(\rho)\tilde{H}'(\rho))}{2 d\rho_*} \partial_{\rho_*} - \frac{l(l+1)}{H} - \tilde{H}(\rho)(\xi R(\rho) + m^2) \right] (Q(\rho)X_l(\rho_*)) = 0.$$

Тогава диференциалният оператор се трансформира, както следва:

$$A\partial_{\rho_*} + B\partial_{\rho_*} + C \rightarrow Q(A\partial_{\rho_*}^2 + \tilde{B}\partial_{\rho_*} + \tilde{C})Q^{-1}, \quad \text{където}$$

$$\text{за } y := \frac{Q'}{Q} \Rightarrow \begin{cases} \tilde{B} = 2Ay + B \\ \tilde{C} = Ay' + Ay^2 + By + C = A\left(\frac{\tilde{B}-B}{2A}\right)' + \frac{\tilde{B}^2 - B^2}{4A} + C \end{cases} \quad (3.6)$$

Избирането на коефициента \tilde{B} ще определи функцията Q с точност до мултипликативна константа. Вземаме $\tilde{B} := 1/\rho_*$ с надежда да получим модифицирано уравнение на Бесел при нулев индекс като асимптотично уравнение в новата променлива, когато $\rho_* \ll 1$.

За $Q(\rho) := \tilde{Q}(\rho_*)$ имаме уравнението

$$\frac{1}{\rho_*} = 2 \frac{\tilde{Q}'(\rho_*)}{\tilde{Q}(\rho_*)} + \frac{1}{2} \frac{d \ln(F(\rho)\tilde{H}'(\rho))}{d\rho_*} \Rightarrow \frac{d\rho_*}{\rho_*} = d \ln \left(Q(\rho)^2 \sqrt{F(\rho)H(\rho)} \right),$$

като интеграционната константа е избрана така, че да има съответствие с по-голямото приближение, което определя $Q(0) = 1$. Решението е

$$Q(\rho) = \sqrt{\frac{\rho_*(\rho)}{\rho \sqrt{(1 + \frac{a}{6}\rho^2)(1 + \frac{\kappa b}{2H}\rho^2)}}, \quad Q(\rho) = 1 - \frac{1}{24} \left(a + \frac{4\kappa b}{H} \right) \rho^2 + O(\rho^4).$$

В степенното разложение използваме и явния вид на $\rho_*(\rho)$:

$$\rho_*(\rho) = \int_0^\rho \left(1 + \frac{\kappa b}{2H} x^2 \right)^{-1/2} dx, \quad \rho_*^2 = \rho^2 - \frac{\kappa b}{6H} \rho^4 + O(\rho^6).$$

Преобразуването (3.6) ще даде

$$\left[\partial_{\rho_*}^2 + \frac{1}{\rho_*} \partial_{\rho_*} - \frac{l(l+1)}{H} - \tilde{H}(\rho)(\xi R(\rho) + m^2) - \frac{1}{4\rho_*^2} - \frac{B'(\rho_*)}{2} - \frac{B(\rho_*)^2}{4} \right] X_l(\rho_*) = 0.$$

Отчитайки, че

$$B'(\rho_*) = \frac{\sqrt{\tilde{H}(\rho)}}{2} \frac{d}{d\rho} \left[\sqrt{\tilde{H}(\rho)} \left(\frac{F'(\rho)}{F(\rho)} + \frac{\tilde{H}'(\rho)}{\tilde{H}(\rho)} \right) \right]$$

и замествайки изходното приближение (3.5б) за $F(\rho)$ и $H(\rho)$, получаваме

$$\left[\partial_{\rho_*}^2 + \frac{1}{\rho_*} \partial_{\rho_*} - \frac{l(l+1)}{H} - \xi R - m^2 - \frac{1}{6} \left(a + \frac{4\kappa b}{H} \right) + O(\rho_*^2) \right] X_l(\rho_*) = 0.$$

Като отчетем формулата за скалярна кривина (3.4), горният резултат се представя във вида

$$\left[\partial_{\rho_*}^2 + \frac{1}{\rho} \partial_{\rho_*} - \tilde{q}_l^2 + O(\rho_*^2) \right] X_l(\rho_*) = 0, \quad (3.7)$$

$$\text{където } \tilde{q}_l := \sqrt{\frac{l(l+1) + 1/3}{H} + M_*^2}, \quad M_*^2 := \left(\xi - \frac{1}{6} \right) R + m^2.$$

С точност до пренебрегване на членовете от втора и по-висока степен на ρ можем да считаме, че за различните l имаме решения в модифицирани функции на Бесел

$$X_l(\rho_*) \approx a_l I_0(\tilde{q}_l \rho_*) + b_l K_0(\tilde{q}_l \rho_*) \quad \text{за } \rho_* \ll 1.$$

$I_0(\tilde{q}_l \rho)$ е бързорастяща за големи стойности на аргумента, следователно остава възможността

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{\text{Im}[\tilde{\mathcal{R}}_l(\rho, \omega)]}{\omega} \approx c_l Q(\rho) K_0(\tilde{q}_l \rho_*). \quad (3.8)$$

Неизвестните константи c_l ще установим, като сравним асимптотичното поведение на лявата и дясната страна на (3.8).

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{\text{Im}[\tilde{\mathcal{R}}_l(\rho, \omega)]}{\omega} = \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{\text{Im}[\psi_l(r_*, \omega) + s_l(\omega) \psi_l(r_*, \omega)^*]}{\sqrt{H(\rho)} \omega} \stackrel{r_* \rightarrow -\infty}{\approx} \frac{(1 - s_l(0)) r_*}{\sqrt{H}} + c$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{\text{Im}[\tilde{\mathcal{R}}_l(\rho, \omega)]}{\omega} \stackrel{\rho \rightarrow 0}{\approx} \frac{2}{\kappa \sqrt{H}} \ln \rho + \text{const} \\ K_0(\tilde{q}_l \rho_*) \stackrel{\rho \rightarrow 0}{\approx} -\ln \rho + \text{const} \end{array} \right\} \Rightarrow c_l = -\frac{2}{\kappa \sqrt{H}}$$

$$\Rightarrow \mathcal{W}_\beta^S(*, \rho, \vec{\Omega}; *, 0, \vec{\Omega}') \approx \frac{Q(\rho)}{\kappa \beta H} \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{2l+1}{4\pi} P_l(\vec{\Omega} \cdot \vec{\Omega}') K_0(\tilde{q}_l \rho_*). \quad (3.9)$$

Когато $x \rightarrow x'$, разстоянието между точките винаги може да бъде избрано много по-малко, отколкото радиусът на бифуркационната сфера. Тогава $\vec{\Omega} \cdot \vec{\Omega}' = \cos \theta \approx 1$ ($\theta \ll 1$) и величината $\sqrt{H} \theta$ става трансверзално

(напречно) разстояние. Освен това уравнението на Лъжандр почти съвпада с уравнението на Бесел за цилиндрична функция с индекс 0.

$$[\partial_\theta^2 + \text{ctg}\theta \partial_\theta] P_l(\cos\theta) = -l(l+1)P_l(\cos\theta) \xrightarrow{\theta \ll 1} \left[\partial_\theta^2 + \frac{1}{\theta} \partial_\theta + l(l+1) \right] P_l(\cos\theta) \approx 0$$

$$P_l(\cos\theta) \approx a_l J_0(\sqrt{l(l+1)}\theta) + b_l N_0(\sqrt{l(l+1)}\theta), \quad \text{но} \quad \begin{cases} \lim_{y \rightarrow 0} N_0(y) = -\infty \\ P_l(1) = J_0(0) = 1 \end{cases}$$

$$P_l(\cos\theta) \approx J_0(\sqrt{l(l+1)}\theta)$$

Въз основа на това се възползваме от хитрото хрумване в [25] – да заменим сумата с интеграл, само че вместо [25, (3.39)], е по-коректна следната замяна (вж. приложение б):

$$\sum_{l=0}^{+\infty} \frac{2l+1}{4\pi} P_l(\cos\theta)(\dots) \xrightarrow{\theta \ll 1} \sqrt{\frac{\theta}{\sin\theta}} \int_1^{+\infty} \frac{2l+1}{4\pi} J_0(\sqrt{l(l+1)} + 1/3\theta)(\dots) dl + \frac{1}{4\pi} (\dots)|_{l=0}, \quad (3.10)$$

$$k := \sqrt{\frac{l(l+1) + 1/3}{H}}, \quad |\mathbf{x}_\perp| \approx \sqrt{H}\theta, \quad k_1 := \sqrt{\frac{7}{3H}}.$$

$$\begin{aligned} \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{2l+1}{4\pi} P_l(\cos\theta)(\dots) &\approx \\ &\approx \frac{H}{2\pi} \sqrt{\frac{\theta}{\sin\theta}} \left[\int_0^{+\infty} J_0(k|\mathbf{x}_\perp|)(\dots) k dk - \int_0^{k_1} J_0(k|\mathbf{x}_\perp|)(\dots) k dk \right] + \frac{1}{4\pi} (\dots)|_{l=0}. \end{aligned}$$

За изследване на мащабна граница в KMS-корелационната функция тази тънка разлика е без значение, но вариантът (3.10) е ключов при възпроизвеждането на логаритмичната сингулярност. Тогава

$$\mathcal{W}_\beta^S(*, \rho, \vec{\Omega}; *, 0, \vec{\Omega}') \approx \frac{Q(\rho)}{2\pi\beta\mathcal{Z}} \sqrt{\frac{\theta}{\sin\theta}} \int_0^{+\infty} J_0(k|\mathbf{x}_\perp|) K_0(\sqrt{k^2 + M_*^2} \rho_*) k dk + \text{несингулярни членове}. \quad (3.11)$$

За клин на Риндлер (3.3) имаме точен резултат, аналогичен на (2.10):

$$\mathcal{W}_\beta^S(*, Z, \vec{x}_\perp; *, 0, \vec{0}) = \frac{1}{2\pi\beta\alpha} \int_0^{+\infty} J_0(k|\mathbf{x}_\perp|) K_0(\sqrt{k^2 + m^2} Z) k dk. \quad (3.12)$$

Адаптираният към нашите означения и избор на сигнатура резултат за симетричната част на уайтмановата функция за пространство на Минковски, даден в [10, (П2Б.5)],

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_{\text{Mink}}^S(\mathbf{x}, \mathbf{x}') &= \frac{m}{8\pi} \Theta(-\sigma) \frac{N_1(m\sqrt{-2\sigma})}{\sqrt{-2\sigma}} + \frac{m}{4\pi^2} \Theta(\sigma) \frac{K_1(m\sqrt{2\sigma})}{\sqrt{2\sigma}} \approx \quad (3.13) \\ &\approx \frac{1}{8\pi^2} \left[\frac{1}{\sigma} + \frac{m^2}{2} \ln \left(\frac{m^2}{2} |\sigma| \right) + \text{несингулярни членове} \right]^{\text{II}}, \end{aligned}$$

позволява да заключим, че

$$\mathcal{W}_{\beta}^S(*, \rho, \vec{\Omega}; *, 0, \vec{\Omega}') \approx \frac{1}{8\pi^2} \frac{2\pi Q(\rho)}{\beta \varkappa} \sqrt{\frac{\theta}{\sin \theta}} \left\{ \frac{1}{\sigma_1} + \frac{M_*^2}{2} \ln \left[\frac{M_*^2}{2} |\sigma_1| \right] + \dots \right\},$$

$$\sigma_1 := \frac{1}{2}(\rho_*^2 + H\theta^2). \quad \text{За } \rho \ll 1 \text{ и } \theta \ll 1 \Rightarrow \sigma(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \approx \frac{1}{2}(\rho^2 + H\theta^2) \approx \sigma_1.$$

Искаме така полученият израз за KMS-корелационната функция с инверсна температура β да бъде нормирано елементарно решение на Адамар (1.5):

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}'} u_0(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{2\pi Q(\rho)}{\beta \varkappa} \lim_{\theta \rightarrow 0} \sqrt{\frac{\theta}{\sin \theta}} := 1 \Rightarrow \boxed{\beta = 2\pi/\varkappa},$$

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}'} v_0(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \lim_{\rho \rightarrow 0} Q(\rho) \lim_{\theta \rightarrow 0} \sqrt{\frac{\theta}{\sin \theta}} \frac{M_*}{2} = \frac{1}{2} \left[m^2 + \left(\xi - \frac{1}{6} \right) R \right].$$

Структурата на сингулярността, получена в околност на точка около бифуркационната повърхнина, се разпространява по изотропни геодезични (следователно върху целия хоризонт) с помощта на теоремата за разпространение на сингулярностите [13, Th. 6.1.1].

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Възпроизвеждането на логаритмична сингулярност от параметрикс на Адамар е една любопитна демонстрация, вдъхновена от работата на Хааг, Нарнхофер и Щайн [25]. Тя няма и не би могла да има за цел установяване на клас от метрики, за които да може да се формулира теорема за съществуване на състояние на Хартъл–Хокинг. Сред метриците, представими във вида (2.1), е възможно да влизат и такива, които не удовлетворяват изискванията за единственост, формулирани и доказани от Кай и Уолд [31].

^{II} $N_1(z) \approx -\frac{2}{\pi z} + \frac{z}{\pi} \ln \frac{z}{2}$, $K_1(z) \approx \frac{1}{z} + \frac{z}{2} \ln \frac{z}{2}$.

Най-простият пример за гравитационно решение със скаларна кривина е метриката на Котлер – разширение на решението на Шварцшилд при наличие на космологична константа Λ :

$$f(r) = 1 - \frac{2M}{r} - \frac{\Lambda}{3}r^2, \quad h(r) = r^2.$$

В зависимост от знака на Λ то е асимптотично де’Ситер или анти-де’Ситер. Първият случай спада към метриците, за които не съществува състояние на Хартъл–Хокинг поради нарушение на теоремата за единственост на температурата [31, Fig.6].

Причината за това привидно несъответствие е, че нашите разглеждания са локални, а истинското изискване за физична значимост на едно алгебрично състояние в линейна квантова теория на полето е свойствата на Адамар да съответстват на глобално решение. Следователно *имаме експлицитен пример за демонстрация на разлика между локално и глобално решение със стандартните средства* – без намесата на микролокалния анализ. Препятствията при неединствено термично състояние би трябвало да съответстват на препятствия за съшиване на възможни локални решения около различните бифуркационни килингови хоризонти за метриката на Шварцшилд–де’Ситер. Извеждането на условия за съществуване на глобално решение със специфични свойства е силно нетривиална задача, за което свидетелства фактът, че понастоящем не разполагаме с квантова теорема за съществуване, класифицираща различни метрики като приемливи или не. Макар да е гарантирано съществуването на състояние на Адамар в какво да е глобално хиперболично риманово многообразие, следователно и в такова с бифуркационен килингов хоризонт, съществуването на изометрично инвариантно такова не е гарантирано.

Нетривиалността на физиката на черна дупка е и това, че атрибутите на един компактен обект – маса, температура – в математичната идеализация са моделирани като свойства на външността – интеграл на Комар, KMS-състояние. Същевременно статистическото обосноваване на ентропията на черна дупка изисква работа с краен обем (или крайна площ), което води до разглеждания във вътрешността (или върху хоризонта). Всичко това е доста чудато на фона на обичайните ни представи за нещата, особено като се има предвид, че температура и ентропия са термодинамично спрегнати величини. Логически това не е нещо фатално, защото нито KMS-температурата, нито ентропията са локални наблюдаеми. Хипотезата на Бекенщайн [4] за ентропия на черна дупка нито е отхвърлена, нито успява да намери подкрепа в аксиоматичната квантова теория на полето върху класически гравитационен фон. Firewall моделите обаче са отхвърлени.

Квантовата теория на полето в изкривено пространство-време, строена върху строги принципи и понятия, следва свой собствен път, започнал в началото на 60-те. Той не е детерминиран от конструктивните резултати,

свързани с имената на де'Вит, Бирел, Дейвис, Фулинг, Унру, Хокинг, Булвар, Дон Пейдж, но несъмнено развитието е повлияно и от нетривиалните следствия от моделите. И макар извеждането на светимости на изпаряваща се черна дупка във всички сектори на КТП да е много по-атрактивен и по-физично изглеждащ резултат от построяването на полиномите на Вик и доказване на крайни флукуации на полето, именно пробивът в математичните методи [38], засягащи основни структури в КТП, се оказва катализиращ нейното развитие, предоставяйки перспективи за завършване изграждането на пертурбативна теория на взаимодействащи полета върху изкривен фон [45].

Пространният увод имаше за цел да покаже, че резултатите от КТП в изкривено пространство-време, получени от аксиоматичния подход (разпознаваем чрез принципи на локалност, алгебрична парадигма и микролокален анализ), съвсем не са козметични спрямо следствията от нашумели модели, строени на базата на физична интуиция и непрецизни понятия. За това свидетелстват и по-го теореме към конкретни модели [31, 32], които биха били недоказуеми със стандартни средства. Различни свойства на KMS-състоянието: пасивност, несъществуване при пространственоподобна динамика, наличието на мащабна граница – са строги резултати от различни нива в йерархията на математичната структура. Какво ще остане като твърд резултат във физиката около бифуркационен килингов хоризонт при евентуално обобщение на квантовата теория – например от линейна към нелинейна – зависи от това кое йерархично ниво няма да бъде засегнато от промените.

5. ДОПЪЛНЕНИЕ

За един физик винаги е естествено да опитва да си представи как абстракциите на описателното ниво на разбиране трябва да изглеждат като процес. И тук възниква интересен въпрос: как така различните метрики (при една и съща повърхнинна гравитация) не се оказват филтри (чрез ефективните потенциали $V_l(\tau_*)$ за разпространение на нормалните моди – частици, които да деформират планковия спектър? Отговорът е прост: частиците не само не идват откъм хоризонта, но няма преимуществено направление, откъдето да пристигат. В противен случай бихме ги впрегнали да вършат работа, което означава, че или нарушаваме доказаното в [37] свойство пасивност на равновесното състояние, или не сме в KMS-състояние, което пък противоречи на геометричните характеристики на избраната идеализация. Подобно на пращинката, тласкана от молекулите към брауново движение, така и детекторът, чийто закон на движение е зададен, извършва случайни квантови преходи поради флукуации на полето. Частицата е възбуждане на детектор, взаимодействащ с квантовото поле. Геометричният производен на температурата съвсем не е аргумент, че частиците са някакви самостоятелни същности, идещи откъм хоризонта. Тук ситуацията е съвсем аналогична

на равномерно ускорения наблюдател в пространство на Минковски. В идеализацията пространство-време с бифуркационен килингов хоризонт метриката не може да е филтър, деформиращ планковия спектър. Липсата на поправка е точен резултат. В идеализацията черна дупка, образувана от колапс, ситуацията е различна – имаме реален поток на енергия от хоризонта навън, което води до обратна реакция (изпарение). Тогава имаме деформация на планковия спектър, породена от влиянието на метриката, масата и индекса на момента на импулса върху движението на модите отвътре навън. Всичко това се отчита в *поправката за сиво тяло* (gray body factor). Така че, когато ни се внушава, че частицата се ражда около хоризонта и после пътува към детектора, трябва да се внимава за коя идеализация става въпрос.

6. БЛАГОДАРНОСТИ

Особени благодарности на разработчиците на *Maplesoft* © *Maple*.

ПРИЛОЖЕНИЕ

А. ПОЛУЧАВАНЕ НА $\mathcal{E}_l(\rho, \rho'; \omega)$

Тъй като

$$\mathcal{E}(\mathbf{x}; \mathbf{x}') := \mathcal{E}(\mathbf{x}; \mathbf{x}')^* \Rightarrow \mathcal{E}_l(\rho, \rho'; -\omega) = \mathcal{E}_l(\rho, \rho'; \omega)^*. \quad (\text{A.1})$$

Граничното условие (1.3a) се свежда до

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{E}_l(\rho, \rho'; \omega) d\omega = 0. \quad (\text{A.2})$$

Експлицитните изрази за гранично условие (1.3b) в случаите (2.1a) и (2.1б) са:

$$\frac{1}{\sqrt{f(r)}} \partial_t \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{2l+1}{4\pi} P_l(\vec{\Omega} \cdot \vec{\Omega}') \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{E}_l(r, r'; \omega) e^{-i\omega(t-t')} d\omega \Big|_{t=t'} = -\frac{\sqrt{f(r)}}{h(r)} \delta(r-r') \delta^2(\vec{\Omega}, \vec{\Omega}'),$$

$$\frac{1}{\sqrt{F(\rho)}} \partial_t \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{2l+1}{4\pi} P_l(\vec{\Omega} \cdot \vec{\Omega}') \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{E}_l(\rho, \rho'; \omega) e^{-i\omega(t-t')} d\omega \Big|_{t=t'} = -\frac{1}{H(\rho)} \delta(\rho-\rho') \delta^2(\vec{\Omega}, \vec{\Omega}').$$

Множителят преди δ идва от $1/\sqrt{g^3}$, където g^3 е детерминантата на индуцираната върху повърхнината на Коши метрика. Липсващата $\sin \theta$ е включена в дираковата функция върху $\mathbb{S}^2 - \delta^2(\vec{\Omega}, \vec{\Omega}')$:

$$\forall S(\vec{\Omega}) \in C^\infty(\mathbb{S}^2) \oint_{\mathbb{S}^2} S(\vec{\Omega}) \delta^2(\vec{\Omega}, \vec{\Omega}') d^2\vec{\Omega} = S(\vec{\Omega}'), \begin{cases} \vec{\Omega} := (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta) \\ d^2\vec{\Omega} := \sin \theta d\theta \wedge d\phi \end{cases}.$$

Ползвайки известното разложение $\delta^2(\vec{\Omega}, \vec{\Omega}') = \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{2l+1}{4\pi} P_l(\vec{\Omega} \cdot \vec{\Omega}')$,

свеждаме граничното условие (1.3b) до

$$i \int_{-\infty}^{+\infty} \omega \mathcal{E}_l(r, r'; \omega) d\omega = \frac{f(r)}{h(r)} \delta(r-r'), \quad (\text{A.3a})$$

$$i \int_{-\infty}^{+\infty} \omega \mathcal{E}_l(\rho, \rho'; \omega) d\omega = \frac{\sqrt{F(\rho)}}{H(\rho)} \delta(\rho-\rho'). \quad (\text{A.3б})$$

В такъв случай намирането на $\mathcal{E}_l(\rho, \rho'; \omega)$ изисква спектрално разложение на $\delta(\rho-\rho')$.

Когато разглеждаме обща ситуация и не знаем явния вид на $\mathcal{R}_l(\rho, \omega)$, единственият начин да получим някаква форма на съотношения на пълнота (completeness relations) е да работим с каноничните (тип Шрьодингер) уравнения (2.3в). *Съотношенията на пълнота не ползват явния вид на функциите, а само техните асимптотиките.* Асимптотиките са най-добре представени в каноничните решения (в костенуркова радиална координата). Когато се знае явният вид на потенциалите, могат да се търсят WKV-приближения за решенията.

За да покрием и случая $\omega = 0$, вместо линейна комбинация от $\psi_l(r_*, \pm\omega)$ ще вземем линейна комбинация от нормирани частни решения на (2.3в):

$$\sqrt{H(\rho)H(\rho')} \mathcal{E}_l(\rho, \rho'; \omega) := C_l^+(r'_*, \omega) \psi_l^+(r_*, \omega) + C_l^-(r'_*, \omega) \psi_l^-(r_*, \omega), \quad (\text{A.4})$$

$$\left. \begin{array}{l} \psi_l^+(r_*, \omega) \xrightarrow{r_* \rightarrow -\infty} \cos \omega r_* \\ \psi_l^-(r_*, \omega) \xrightarrow{r_* \rightarrow -\infty} \omega^{-1} \sin \omega r_* \end{array} \right\} \Rightarrow \underbrace{Wr[\psi_{\omega l}^+, \psi_{\omega l}^-]}_{\text{Вронскиан}} = 1,$$

като множителят отляво е поставен за удобство.

Отчитайки, че $\psi_l^\pm(r_*, -\omega) = \psi_l^\pm(r_*, \omega)$, условието (A.2) може да бъде записано като

$$\int_0^{+\infty} [(C_l^+(r'_*, \omega) + C_l^+(r'_*, -\omega)) \psi_l^+(r_*, \omega) + (C_l^-(r'_*, \omega) + C_l^-(r'_*, -\omega)) \psi_l^-(r_*, \omega)] d\omega = 0.$$

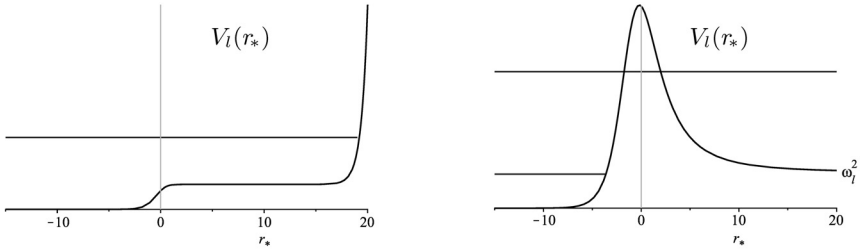
Като следствие от линейната независимост на $\psi_l^\pm(r_*, \omega)$ получаваме:

$$\Rightarrow C_l^\pm(r'_*, -\omega) = -C_l^\pm(r'_*, \omega) \Rightarrow \mathcal{E}_l(\rho, \rho'; -\omega) = -\mathcal{E}_l(\rho, \rho'; \omega). \quad (\text{A.5})$$

Възползвайки се от (A.5), каноничният вид на (A.3) е

$$2i \int_0^{+\infty} \omega (C_l^+(r'_*, \omega) \psi_l^+(r_*, \omega) + C_l^-(r'_*, \omega) \psi_l^-(r_*, \omega)) d\omega = \delta(r_* - r'_*). \quad (\text{A.6})$$

Възможните асимптотики за ефективния потенциал са:



Фиг. 1: Възможни профили на ефективните потенциали във външната област на статично пространство време с черна дупка.

$$\text{а) } \lim_{r_* \rightarrow +\infty} V_l(r_*) = +\infty, \quad \text{б) } \lim_{r_* \rightarrow +\infty} V_l(r_*) = \omega_l^2.$$

Напълно възможно е за различни стойности на индекса l да попадаме в различни случаи.

Сред частните решения на (2.3в) с поисканите по-горе асимптотики е възможно да има континуално много такива, които растат по-бързо от полином при $r_* \rightarrow +\infty$.

В случай (а) е възможно $\psi_l(r_*, \omega)$ и $\psi_l(r_*, \omega)^*$ да са бързорастящи решения. Фурие разложението на $\delta(r_* - r_*')$ изисква ограничение до обобщени функции от S-тип. Следователно $\Phi_l(r_*, \omega)$ и $\Phi_l(r_*, \omega)^*$ са линейно зависими:

$$\Phi_l(r_*, \omega) := \psi_l(r_*, \omega) + s_l(\omega)\psi_l(r_*, \omega)^* \Rightarrow \begin{cases} |s_l(\omega)| = 1 \\ s_l(-\omega) = s_l(\omega)^* \end{cases}.$$

Този случай се свежда до (A.10).

В случая (б) по-общата ситуация е наличие на прагови честоти $\omega_l > 0$. Асимптотичните уравнения (2.3в) при $r_* \rightarrow +\infty$ ще имат вида

$$\partial_{r_*}^2 \psi_l(r_*, \omega) + k_l^2 \psi_l(r_*, \omega) = 0, \quad \text{където } k_l := \sqrt{\omega^2 - \omega_l^2}, \quad (\text{A.7})$$

така че асимптотично поведение на решенията ще бъде:

$$\begin{array}{l} \begin{array}{ccc} -\infty & \leftarrow & r_* & \rightarrow & +\infty \\ 1) & \omega < \omega_l & e^{\pm i\omega r_*} & \leftarrow & \psi_l(r_*, \pm\omega) & \rightarrow & A_l(\pm\omega) e^{-\varkappa_l r_*} + B_l(\pm\omega) e^{\varkappa_l r_*}, \\ 2) & \omega > \omega_l & e^{\pm i\omega r_*} & \leftarrow & \psi_l(r_*, \pm\omega) & \rightarrow & A_l(\pm\omega) e^{ik_l r_*} + B_l(\pm\omega) e^{-ik_l r_*}, \end{array} \end{array}$$

където $\varkappa_l := -ik_l$.

СЛУЧАЙ 1 ($\omega < \omega_l$): Тогава $k_l = i\varkappa_l$, където $\varkappa_l > 0$. $\psi_l(r_*, \pm\omega)$ не могат да бъдат S-клас обобщени функции, но подходяща линейна комбинация може да изключи нарастващата експонента:

$$\Phi_l(r_*, \omega) \xrightarrow{r_* \rightarrow +\infty} (A_l(\omega) + s_l(\omega)A_l(-\omega))e^{-\varkappa_l r_*} + \underbrace{(B_l(\omega) + s_l(\omega)B_l(-\omega))}_{0} e^{\varkappa_l r_*},$$

$$\Phi_l(r_*, \omega) := \psi_l(r_*, \omega) + s_l(\omega)\psi_l(r_*, -\omega) \Rightarrow s_l(\omega) = -\frac{B_l(\omega)}{B_l(-\omega)}. \quad (\text{A.8})$$

Свойство $\psi_l(r_*, -\omega) = \psi_l(r_*, \omega)^*$ за този случай дава следната връзка между коефициентите:

$$A_l(-\omega) = A_l(\omega)^*, \quad B_l(-\omega) = B_l(\omega)^* \quad \stackrel{(A.8)}{\implies} \quad \left| \begin{array}{l} |s_l(\omega)| = 1 \\ s_l(-\omega) = s_l(\omega)^* \end{array} \right. . \quad (A.9)$$

Въвеждаме скалярно произведение в обобщен смисъл и се възползваме от факта, че функциите $\Phi_l(r_*, \omega)$ са решения на (2.3в). С помощта на двукратно интегриране по части лесно стигаме до резултата

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_l(r_*, \omega')^* \Phi_l(r_*, \omega) dr_* = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left. \frac{\Phi_l(r_*, \omega')^* \partial_{r_*} \Phi_l(r_*, \omega) - \partial_{r_*} \Phi_l(r_*, \omega')^* \Phi_l(r_*, \omega)}{\omega'^2 - \omega^2} \right|_{r_* = -x}^x, \quad (A.10a)$$

който ще ни даде нормировката (коефициентите пред δ -функцията) от двете асимптотики на решението. В случая в горната граница имаме нула, а в долната трябва да изчислим граница от осцилираща експонента в термини на обобщени функции:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{e^{-i(\omega - \omega')x}}{-i(\omega - \omega')} + s_l(\omega) s_l(\omega')^* \frac{e^{i(\omega - \omega')x}}{i(\omega - \omega')} + s_l(\omega')^* \frac{e^{-i(\omega + \omega')x}}{-i(\omega + \omega')} + s_l(\omega) \frac{e^{i(\omega + \omega')x}}{i(\omega + \omega')} \right] = \\ = 2\pi \delta(\omega - \omega'). \end{aligned} \quad (A.10b)$$

Тук използваме трика $\forall k \in \mathbb{R} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{ikx}}{ik} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{ikx} - 1}{ik} + \frac{1}{ik} = \int_0^{+\infty} e^{ikx} dx + \frac{1}{ik} = \pi \delta(k)$ [10]. Освен това отчитаме, че разглеждаме случая, когато $\omega_l > \omega, \omega' > 0 \Rightarrow \delta(\omega + \omega') = 0$. Следователно

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_l(r_*, \omega')^* \Phi_l(r_*, \omega) dr_* = 2\pi \delta(\omega - \omega'). \quad (A.10b)$$

Получаваме частичен израз за разложението:

$$\begin{aligned} \delta(r_* - r'_*) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\omega_l} \Phi_l(r_*, \omega')^* \Phi_l(r_*, \omega) d\omega + \int_{\omega_l}^{+\infty} (\dots) d\omega, \\ \Phi_l(r_*, \omega')^* \Phi_l(r_*, \omega) &= 2\text{Re}[\Phi_l(r_*, \omega') \psi_l(r_*, \omega)]. \end{aligned}$$

Случай 2 ($\omega > \omega_l$): Тогава $k_l \in \mathbb{R}$. Отново (2.9) и свойствата на вронскиана дават връзките:

$$\text{а) } A_l(-\omega) = B_l(\omega)^*, \quad \text{б) } \omega = k_l (|A_l(\omega)|^2 - |B_l(\omega)|^2). \quad (A.11)$$

Спектърът на диференциалния оператор е двукратно изроден, защото и двете собствени функции $\psi_l(r_*, \pm\omega)$ са разпределения. Това, че към хоризонта те

асимптотично преминават в $e^{\pm i\omega r_*}$, не ги прави ортогонални, което може да се види от изведеното по-долу скаларно произведение при $\omega' = -\omega$.

$$\langle \omega' l | \omega l \rangle := \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_l(r_*, \omega')^* \psi_l(r_*, \omega) dr_* = \pi \delta(k_l - k'_l) (A_l(\omega')^* A_l(\omega) + B_l(\omega')^* B_l(\omega)) + \pi \delta(\omega - \omega') = \pi \left[(|A_l(\omega)|^2 + |B_l(\omega)|^2) \frac{k_l}{|\omega|} + 1 \right] \delta(\omega + \omega') + 2\pi \frac{k_l}{|\omega|} A_l(\omega) B_l(\omega) \delta(\omega + \omega').$$

Тук използвахме, че $\delta(k_l - k'_l) = \delta(\sqrt{\omega^2 - \omega_l^2} - k'_l) = \frac{k_l}{|\omega|} (\delta(\omega + \omega') + \delta(\omega - \omega'))$. Като се възползваме от (A.11б), достигаме до

$$\langle \omega' l | \omega l \rangle = \frac{2\pi k_l}{|\omega|} \left[|A_l(\omega)|^2 \delta(\omega - \omega') + A_l(\omega) B_l(\omega) \delta(\omega + \omega') \right]. \quad (\text{A.12})$$

Очевидно двете решения не са ортогонални, но това не пречи да търсим коефициентите в разложението

$$\delta(r_* - r'_*) = \int_0^{\omega_l} \Phi_l^*(r'_*, \omega) \Phi_l(r_*, \omega) d\omega + \int_{\omega_l}^{+\infty} (D_l(r'_*, \omega) \psi_l(r_*, \omega) + D_l^*(r'_*, \omega) \psi_l(r_*, -\omega)) d\omega.$$

Като използваме, че при $\omega' > \omega_l \wedge \omega < \omega_l \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_l(r_*, \omega')^* \Phi_l(r_*, \omega) dr_* = 0$, получаваме

$$\psi_l^*(r'_*, \omega') = \int_{\omega_l}^{+\infty} [D_l(r'_*, \omega) \langle \omega' l | \omega l \rangle + D_l^*(r'_*, \omega) \langle \omega' l | -\omega l \rangle] d\omega.$$

$$\psi_l^*(r'_*, \omega') = \int_{\omega_l}^{+\infty} \frac{2\pi k_l}{\omega} \left\{ D_l(r'_*, \omega) [|A_l(\omega)|^2 \delta(\omega - \omega') + A_l(\omega) B_l(\omega) \delta(\omega + \omega')] + D_l^*(r'_*, \omega) [|A_l(\omega)|^2 \delta(\omega + \omega') + A_l(-\omega) B_l(-\omega) \delta(\omega - \omega')] \right\} d\omega.$$

$$\text{При } \omega > \omega_l \Rightarrow \begin{pmatrix} |A_l(\omega)|^2 & A_l(\omega)^* B_l(\omega)^* \\ A_l(\omega) B_l(\omega) & |A_l(\omega)|^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_l(r'_*, \omega) \\ D_l^*(r'_*, \omega)^* \end{pmatrix} = \frac{\omega}{2\pi k_l} \begin{pmatrix} \psi_l(r'_*, \omega)^* \\ \psi_l(r'_*, \omega) \end{pmatrix}.$$

Отново използваме (A.11б) и получаваме

$$D_l(r'_*, \omega > \omega_l) = \frac{1}{2\pi} \left(\psi_l(r'_*, \omega)^* - \frac{B_l(\omega)^*}{A_l(\omega)} \psi_l(r'_*, \omega) \right), \text{ където } \omega_l > 0.$$

Връзката (A.11а) ни позволява да разширим валидността на изведения преди това резултат (A.9) и за случаите, когато $\omega > \omega_l$:

$$-s_l(\omega) = \frac{B_l(\omega)}{B_l(-\omega)} = \begin{cases} B_l(\omega)/B_l(\omega)^* & \text{при } 0 < \omega < \omega_l \\ B_l(\omega)/A_l(\omega)^* & \text{при } \omega > \omega_l \end{cases}.$$

$$\begin{aligned}\delta(r_* - r'_*) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \operatorname{Re} [\Phi_l(r'_*, \omega)^* \psi_l(r_*, \omega)] d\omega = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \{ \operatorname{Re} [\Phi_l(r'_*, \omega)^*] \psi_l^+(r_*, \omega) - \omega \operatorname{Im} [\Phi_l(r'_*, \omega)^*] \psi_l^-(r_*, \omega) \} d\omega.\end{aligned}\quad (\text{A.13})$$

Тук $\Phi_l(r'_*, \omega)$ е както в (A.8), но додефинирана чрез продължението на $s_l(\omega)$ за честоти $\omega > \omega_l$. Сравнявайки последния резултат с (A.6), определяме коефициентите

$$C_l^+(r'_*, \omega) = \frac{-i}{2\pi\omega} \operatorname{Re} [\Phi_l(r'_*, \omega)^*], \quad C_l^-(r'_*, \omega) = \frac{i}{2\pi} \operatorname{Im} [\Phi_l(r'_*, \omega)^*].$$

Така изразът за радиалната част на коефициентите на Фурие е

$$\mathcal{E}_l(\rho, \rho'; \omega) = \frac{-i}{2\pi\omega} \operatorname{Re} [(\mathcal{R}_l(\rho', \omega)^* + s_l(\omega)^* \mathcal{R}_l(\rho', \omega)) \mathcal{R}_l(\rho, \omega)], \quad \text{само за } \omega \geq 0. \quad (\text{A.14a})$$

За да разпространим валидността на горния израз и за отрицателни честоти, трябва да додефинираме $s_l(\omega)$ чрез свойството $\mathcal{E}_l(\rho, \rho'; -\omega) = -\mathcal{E}_l(\rho, \rho'; \omega)$, което дава

$$s_l(\omega) := -\Theta(\omega) \frac{B_l(\omega)}{B_l(-\omega)} - \Theta(-\omega) \frac{B_l(-\omega)^*}{B_l(\omega)^*} \Rightarrow s_l(-\omega) = s_l(\omega)^*. \quad (\text{A.14б})$$

Лесно се вижда, че също така е изпълнено равенството $\mathcal{E}_l(\rho, \rho'; \omega) = \mathcal{E}_l(\rho', \rho; \omega)$.

Б. ПРИБЛИЖЕНИЕ ЗА $P_l(\cos \theta)$ ПРИ $\theta \ll 1$

За $l > 0$ приближението $P_l(\cos \theta) \approx \sqrt{\frac{\theta}{\sin \theta}} J_0(\sqrt{l(l+1)+1/3} \theta)$ е по-добро от $P_l(\cos \theta) \approx J_0(\sqrt{l(l+1)} \theta)$.

Полагайки $P_l(\cos \theta) := Q(\theta) \psi_l(\theta)$, привеждаме в каноничен вид оператора $\partial_\theta^2 + \operatorname{ctg} \theta \partial_\theta = Q(\theta) [\partial_\theta^2 + U(\theta)] Q(\theta)^{-1}$, възползвайки се от равенства (3.6). Получаваме $Q(\theta) = 1/\sqrt{\sin \theta}$, а също и уравнението

$$\left[\partial_\theta^2 + \frac{1}{4 \sin^2 \theta} + \frac{1}{4} + l(l+1) \right] \psi_l(\theta) = 0 \Rightarrow U(\theta) = \frac{1}{4 \sin^2 \theta} + \frac{1}{4} = \underbrace{\frac{1}{4\theta^2} + \frac{1}{3}}_{\text{}} + \frac{\theta^2}{60} + O(\theta^4).$$

Извършваме приближението в потенциалите

$$U(\theta) \approx \frac{1}{4\theta^2} + \frac{1}{3} \Rightarrow \left[\partial_\theta^2 + \frac{1}{4\theta^2} + \frac{1}{3} + l(l+1) \right] \tilde{\psi}_l(\theta) = 0 \Rightarrow \psi_l(\theta) \approx \tilde{\psi}_l(\theta).$$

Полученото уравнение е каноничният вид на уравнение на Бесел за цилиндрична функция с нулев индекс:

$$\left[\partial_\theta^2 + \frac{1}{\theta} \partial_\theta + \left(\sqrt{l(l+1)+\frac{1}{3}} \right)^2 \right] (\tilde{Q}(\theta) \tilde{\psi}_l(\theta)) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \tilde{Q}(\theta) = 1/\sqrt{\theta} \\ \tilde{\psi}_l(\theta) = \sqrt{\theta} J_0(\sqrt{l(l+1)+1/3} \theta) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \sqrt{\sin \theta} P_l(\cos \theta) \approx \sqrt{\theta} J_0(\sqrt{l(l+1)+1/3} \theta).$$

Сравнение:

$$P_l(\cos \theta) - J_0(\sqrt{l(l+1)} \theta) = -c_l \theta^4 + O(\theta^6) : \quad \begin{array}{c|c|c|c|c|c|c} l & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \dots \\ \hline c_l & \frac{1}{48} & \frac{1}{16} & \frac{1}{8} & \frac{5}{24} & \frac{5}{16} & \dots \end{array}$$

$$P_l(\cos \theta) - \sqrt{\frac{\theta}{\sin \theta}} J_0(\sqrt{l(l+1)+1/3} \theta) = \frac{-1}{960} \theta^4 + O(\theta^6) \quad \forall l \in \mathbb{N}.$$

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Araki, H. *Publ. RIMS, Kyoto Univ.*, 1976, **11**, 809.
- [2] Araki, H. *Publ. RIMS, Kyoto Univ.*, 1977, **13**, 173.
- [3] Araki, H. In: *C*-algebras and applications to physics*. Lecture notes in mathematics, **650**, p.66, Springer, New York, 1978.
- [4] Bekenstein, J. *Phys. Rev. D*, 1973, **7**, No. 8, 2333.
- [5] Borchers, H. *Theory of local observables and KMS-condition*, Preprint, 1994.
- [6] Borchers, H. *J. Math. Phys.*, 2000, **41**, 6 3604.
- [7] Bär, C., Fredenhagen, K. (eds.), *Quantum field theory on curved spacetimes*, LNP0786, Springer, 2009.
- [8] Brunetti, R., Fredenhagen, K., Köhler, M. *Commun. Math. Phys.*, 1996, **180**, 633.
- [9] Bisognano, J., Wichmann, E. *J. Math. Phys.*, 1975, **12**, 985.
- [10] Bogoliubov, N., Shirkov, D., *Introduction to the theory of quantized fields*, (in russian) Moskwa, „Nauka“, 1984.
- [11] Buchholz, D., Schlemmer, J. *Class. Quant. Grav.*, 2007, **24**, F25. [arXiv:gr-qc/0608133]
- [12] DeWitt, B., Brehme, R. *Annals Phys.*, 1960, **9**, 220.
- [13] Duistermaat, J., Hörmander, L. *Acta Math.*, 1972, **128**, 183.
- [14] Dimock, J., Kay, B. *Annals Phys.*, 1987, **175**, 366.
- [15] Dimock, J., Kay, B. *J. Math. Phys.*, 1986, **27**, 2520.
- [16] Dappiaggi, C., Moretti, V., Pinamonti, N. *Adv. in Theor. and Math. Physics*, 2011, **15**, No. 2. [arXiv:gr-qc/0907.1034]
- [17] Fulling, S. *Phys. Rev. D*, 1973, **7**, 2851.
- [18] Fulling, S., Sweeny, M., Wald, R. *Commun. Math. Phys.*, 1978, **63**, 257.
- [19] Fulling, S., Narcowich, F., Wald, R. *Annals Phys.*, 1981, **136**, 243.
- [20] Fredenhagen, K., Haag, R. *Commun. Math. Phys.*, 1990, **127**, 273.
- [21] Fewster, Ch., Verch, R. *Class. Quant. Grav.*, 2013, **30**, 235027. [arXiv:gr-qc/1307.5242]

- [22] Fröb, M. [arXiv:gr-qc/1708.00444]
- [23] Haag, R., *Local Quantum Physics – Fields, Particles, Algebras*, Second edition, Springer, 1996.
- [24] Haag, R., Hugenholtz, N., Winnik, M. *Commun. Math. Phys.*, 1967, **5**, 215.
- [25] Haag, R., Narnhofer, H., Stein, U. *Commun. Math. Phys.*, 1984, **94**, 219.
- [26] Hawking, S. *Commun. Math. Phys.*, 1975, **43**, 199.
- [27] Hessling, H. *Nuclear Physics B*, 1994, **415**, 243.
- [28] Hollands, S. *Commun. Math. Phys.*, 2001, **216**, 635.
- [29] Kay, B. *Commun. Math. Phys.*, 1985, **100**, 57.
- [30] Kay, B. *Encyclopedia of mathematical physics*, J.-P. Francoise, G. Naber and T.S. Tsou, eds., Academic (Elsevier) Amsterdam, New York and London 2006, Vol. 4, pages 202–214 [arXiv:gr-qc/0601008]
- [31] Kay, B., Wald, R. *Phys. Rep.*, 1991, **207**, No. 2, 49.
- [32] Kay, B., Radzikowski, M., Wald, R. *Commun. Math. Phys.*, 1997, **183**, 533. [arXiv:gr-qc/9603012]
- [33] Morreti, V. *Commun. Math. Phys.*, 1999, **208**, 283.
- [34] Morreti, V. *Commun. Math. Phys.*, 2000, **212**, 165.
- [35] Morreti, V. *Commun. Math. Phys.*, 2003, **232**, 189.
- [36] Pinamonti, N., Sanders, Ko, Verch, R. [arXiv:math-ph/1806.02124]
- [37] Pusz, W., Woronowicz, S. *Commun. Math. Phys.*, 1978, **58**, 273.
- [38] Radzikowski, M. *Commun. Math. Phys.*, 1996, **179**, 529.
- [39] Sanders, Ko *Intern. J. Modern Phys. A*, 2013, **28**, 1330010. [arXiv:math-ph/1209.6068]
- [40] Sewell, G. *Phys. Rep.*, 1980, **57**, No. 5, 307.
- [41] Sewell, G. *Phys. Lett.*, 1980, **79A**, 23.
- [42] Strohmaier, A. *Commun. Math. Phys.*, 2000, **215**, 105. [arXiv:math-ph/0002054]
- [43] Unruh, W. *Phys. Rev. D*, 1976, **14**, 870.
- [44] Verch, R. *Commun. Math. Phys.*, 1994, **160**, 507.
- [45] Wald, R. [arXiv:gr-qc/0608018v1]