Annuaire de l'Universite de Sofia "St. Kliment Ohridski", Faculte de Physique
Edition Spéciale, 2012

ПРОСТИ ОЦЕНКИ В КВАНТОВАТА ФИЗИКА

ДИМИТЪР МЪРВАКОВ

Катедра „Методика на обучението по физика"
Физически факултет, Софийски университет „Св. Климент Охридски"

Димитър Мърваков. ПРОСТИ ОЦЕНКИ В КВАНТОВАТА ФИЗИКА

С помощта на съотношенията за неопределеност на Хайзенберг и квантуване чрез стоящи вълни са разгледани: структурата на енергетичния спектър на частица в едномерна степенна потенциална яма в зависимост от стойността на степенния показател, квантуването на движението на заредена частица в магнитно поле (без използване на векторен потенциал), диамагнитната възприемчивост на хелий. Сравнени са силите при ядрено и електромагнитно взаимодействие чрез оценка на константата на ядреното взаимодействие в термини на електричен заряд. За леки ядра е формулиран и анализиран слоест модел за кубично ядро.

Dimitar Marvakov. SIMPLE ESTIMATIONS IN QUANTUM PHYSICS

By the Heisenberg uncertainty relations and a quantization with standing waves of de Broglie the structure of an energy spectrum of a particle in one-dimensional potential well with power dependence as well as the motion of charged particle in a magnetic field (without use of a vector potential) have been considered. The diamagnetic susceptibility of helium has been also estimated. The comparison between the nuclear and electromagnetic forces has been made in terms of electric charges by the estimation of the nuclear interaction constant. The simple shell model is formulated and applied to light nucleus in a cubic nucleon approximation.

Keywords: Heisenberg uncertainty relations, quantization, standing waves of de Broglie.

PACS numbers: 03.65 Ge, 75.30 Cr, 21.30 Fe, 21.60 Cs

За контакти: Димитър Мърваков, Катедра „Методика на обучението по физика" Физически факултет, Софийски университет „Св. Климент Охридски", бул. „Джеймс Баучер„ 5, 1164 София, тел.: +359 2 8161/893;659, E-mail: marvakov@phys.uni-sofia.bg

1. ВЪВЕДЕНИЕ

Основната идея на квантовата механика е свързана с предположението, че всяка микрочастица се характеризира с вълнов процес с дължина на вълната

$$\lambda = \frac{h}{p},$$

където p е импулсът на частицата, а h – константата на Планк. Както е известно, за пространствено ограничено движение енергията на частицата има дискретни стойности, които намираме чрез решаване на уравнението на Шрьодингер. В много случаи е възможно да се получи оценка за енергията, като се отчетат вълновите свойства на частицата. Тези оценки се базират на използване на съотношението за неопределеност на Хайзенберг

$$\Delta x \Delta p \sim \hbar$$

и на възможността в стационарно състояние да се формира стояща вълна в класически разрешената област [1]. Използването на съотношението за неопределеност като правило дава добра оценка за енергията на основното състояние [2, 3], а оценките с помощта на стоящи вълни – представа за целия енергетичен спектър [1].

В настоящата работа с използването на двата подхода са анализирани няколко типични (и достатъчно сложни) квантовомеханични задачи. Представеното изложение може да се окаже полезно в случаите, когато обучението на студентите е ограничено до използването на елементарни математически средства.

2. СТРУКТУРА НА ЕНЕРГЕТИЧНИЯ СПЕКТЪР НА ЧАСТИЦА В БЕЗКРАЙНО ДЪЛБОКА ПОТЕНЦИАЛНА ЯМА

С помощта на формирането на стоящи вълни може да бъде изучена структурата на енергетичния спектър на частица с маса m в поле с потенциална енергия

$$U(x) = U_0 |x|^{\nu}.$$

Нека класически разрешената област се простира от $-x_0$ до x_0, т.е. има дължина $L = 2x_0$. Условието да се формира стояща вълна на Дьо Бройл на тази дължина е

$$n\frac{\lambda}{2} = L\,,$$

при което възможните стойности на импулса са

$$p_n = \frac{\pi\hbar n}{2x_0}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Енергията на частицата като функция на x_0 има вида

$$\varepsilon = \frac{(\pi\hbar n)^2}{8mx_0^2} + U_0\left|x_0\right|^{\nu}.$$

Енергията ще бъде минимална при дадено n, ако

$$\left|x_0\right| = \left(\frac{\pi^2\hbar^2}{4m\nu U_0}\right)^{1/(\nu+2)} n^{2/(\nu+2)},$$

и ще се дава с израза

$$\varepsilon_n = An^{2\nu/(\nu+2)},$$

където A се изразява чрез фундаментални константи и параметрите на потенциала и частицата. Разстоянието между нивата може да се запише във вида

$$\Delta\varepsilon_n = \varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n \approx \frac{2\nu}{\nu+2} \times \frac{\varepsilon_n}{n}.$$

Тогава имаме три възможности:

а) при $v = 2$ имаме $\Delta\varepsilon_n = \text{const}$ и спектърът е еквидистантен (хармоничен осцилатор);

б) при $v > 2$ имаме $\Delta\varepsilon_n \sim n^{\alpha}$, $\alpha > 0$ и разстоянието между нивата расте с увеличаване на n (безкрайно дълбока правоъгълна потенциална яма);

в) при $v < 2$ имаме $\Delta\varepsilon_n \sim n^{-\alpha}$, $\alpha > 0$ и разстоянието между нивата намалява с увеличаване на n (водороден атом, триъгълна безкрайно дълбока потенциална яма).

3. ДВИЖЕНИЕ НА ЗАРЕДЕНА ЧАСТИЦА В МАГНИТНО ПОЛЕ

Разглежданата задача е една от точнорешаемите в квантовата механика [4]. Тук ще приведем елементарно решение без използване на понятието векторен потенциал. Движението на частица със заряд q в хомогенно и постоянно магнитно поле с индукция B става с постоянна енерия

$$\varepsilon = \frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}{2m},$$

тъй като магнитната сила не върши работа. От класическите уравнения на движение

$$\frac{dp_x}{dt} = qv_y B, \quad \frac{dp_y}{dt} = -qv_x B, \quad \frac{dp_z}{dt} = 0$$

след интегриране на второто уравнение намираме

$$p_y - p_{y0} = -qxB.$$

Тогава можем да запишем

$$\frac{p_y^2}{2m} = \frac{1}{2} m\omega^2 (x - x_0)^2,$$

където $x_0 = -\frac{p_{y0}}{m\omega}$, а $\omega = \frac{qB}{m}$ е циклотронната честота. Окончателно енергията на частицата може да се запише във вида

$$\varepsilon = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 (x - x_0)^2 + \frac{p_z^2}{2m}.$$

По този начин успяхме да представим енергията на заредената частица, движеща се в магнитно поле, като енергия, свързана с две независими движения – едномерно хармонично трептене с честота ω около равновесното положение x_0 и равномерно движение по оста Oz.

За да проквантуваме движението на частицата, нека приемем, че тя се намира в паралелепипед със страни L_x, L_y и L_z. Възможните стойности на енергията на осцилатора са [4]

$$\varepsilon_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right), \quad n = 0, 1, 2, ...,$$
,

а при формирането на стояща вълна по оста Oz възможните стойности на импулса в тази посока са

$$p_z = \frac{\pi\hbar}{L_z} n_z, \quad n_z = 1, 2, 3, ...$$

За енергията на частицата получаваме

$$\varepsilon_{n,n_z} = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{\pi\hbar}{L_z} n_z\right)^2.$$
.

Пълният набор квантови числа, които определят състоянието на заредената частица в магнитно поле, включва освен числата n и n_Z и равновесното положение на осцилатора x_0. Енергията на частицата не зависи от x_0 и е изродена по това квантово число, т.е. по възможните стойности на $p_{y0} = \frac{\pi\hbar}{L_y} n_y$, където n_y = 1, 2, ..., n_{max}. Стойността на израждане g на енергетичното ниво се определя от условието

$$0 < |x_0| < L_x, \quad 0 < n_y < \frac{qB}{\pi\hbar} L_x L_y,$$

откъдето следва

$$g = \frac{qB}{\pi\hbar} L_x L_y.$$

Указаният подход за квантуване в магнитно поле дава възможност да се намери правилната стойност на кванта на магнитния поток [5]. Нека разгледаме електрон със заряд -q, движещ се по окръжност в равнина, перпендикулярна на магнитното поле. Радиусът r на окръжността е

$$r = \frac{mv}{qB} = \frac{p}{qB}.$$

Тогава магнитният поток Ф през повърхността, оградена от траекторията на частицата, е

$$\Phi = B\pi r^2 = \frac{\pi p^2}{q^2 B} = \frac{2\pi m}{q^2 B}\varepsilon,$$

където енергията на частицата е

$$\varepsilon = \frac{p_x^2 + p_y^2}{2m} = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\left(x - x_0\right)^2.$$

Като заместим енергията на частицата с квантуваната енергия на осцилатора, получаваме

$$\Phi = \Phi_0\left(n + \frac{1}{2}\right), \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Тук квантът на магнитния поток е

$$\Phi_0 = \frac{h}{q},$$

където константата на Планк $h = 2\pi\hbar$, а q е елементарният електричен заряд.

4. МАГНИТНА ВЪЗПРИЕМЧИВОСТ НА ХЕЛИЯ

За да оценим магнитната възприемчивост на хелия, ще пресметнем индуцирания магнитен момент в един атом, когато интензитетът на външното магнитно поле се изменя от 0 до H. За простота ще приемем, че даден електрон в атома, съгласно теорията на Бор, се движи по кръгова орбита с радиус ρ, която лежи в равнина, перпендикулярна на интензитета на магнитното поле H. В процеса на нарастване на интензитета на магнитното поле в контура, по който се движи електронът, се индуцира ЕДН

$$\varepsilon = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t},$$

където $\Delta\Phi$ е изменението на магнитния поток през кръга с радиус ρ. Интензитетът на електричното поле, което ускорява електрона, движещ се по окръжността, е

$$E = \frac{\varepsilon}{2\pi\rho}.$$

То действа върху електрона със сила $F = qE$ и поражда ускорение на електрона съгласно с втория закон на Нютон

$$m\frac{\Delta v}{\Delta t} = qE = -\frac{q}{2\pi\rho}\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}.$$

По такъв начин изменението на магнитното поле води до изменение на скоростта на електрона с

$$\Delta v = -\mu_0\frac{q\rho}{2m}\Delta H,$$

тъй като $\Delta\Phi = \mu_0\pi\rho^2\Delta H$. С изменението на скоростта е свързана промяна на момента на импулса $\Delta L = m\rho\Delta v$, а така също и на магнитния момент с

$$\Delta\mu = -\mu_0\frac{q^2\rho^2}{4m}H.$$

Връзката между μ и L следва от веригата равенства при движение по кръгова орбита

$$\mu = IS = \frac{q}{T}S = \frac{q\mathrm{v}}{2\pi\rho}\pi\rho^2 = \frac{q}{2m}L.$$

В действителност, в съответствие с квантовата механика, електроните в атомите не се движат по орбити. Изведената формула обаче може да се приложи, ако разстоянието ρ до центъра на окръжността в разглеждания модел се замени със средното разстояние в пространството и се отчете сферичната симетричност на хелиевия атом, т.е. пълната еквивалентност на направленията x, y, z. Тогава $\rho^2 = \frac{2}{3} < r^2 >$ и за индуцирания магнитен момент в един атом хелий получаваме

$$\Delta\mu = -\frac{\mu_0 q^2}{6m} < r_1^2 + r_2^2 > H.$$

В основното състояние на хелиевия атом двата му електрона се намират на еднакви средни разстояния от ядрото (вж. по-долу). Понеже в един mol вещество има N_A на брой атоми, следва, че индуцираният магнитен момент в един mol вещество е $\Delta M = N_\mathrm{A}\Delta\mu$, откъдето за магнитната възприемчивост $\chi = \frac{\Delta M}{H}$ получаваме израза

$$\chi = -\frac{\mu_0 q^2 N_\mathrm{A}}{3\mathrm{m}} < r^2 > .$$

За да оценим средното разстояние на електрона до ядрото в хелиевия атом, ще разгледаме хелиевоподобен йон със заряд на ядрото Zq. Нека разстоянията на първия и втория електрон от ядрото са съответно r_1 и r_2. Според съотношенията за неопределеност на Хайзенберг импулсите на електроните ще са съответно

$$p_1 \approx \frac{\hbar}{r_1},\ p_2 \approx \frac{\hbar}{r_2},$$

при което кинетичната им енергия е

$$T = \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2}\right).$$

Потенциалната енергия на взаимодействие на електроните с ядрото е

$$U_1 = -Ze^2\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right),$$

а енергията на взаимодействие между електроните –

$$U_2 = \frac{e^2}{r_{12}} > \frac{e^2}{r_1 + r_2},$$

където $e^2 = \dfrac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}$. Енергията на основното състояние се определя като минимум на пълната енергия

$$E(r_1, r_2) = \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2}\right) - Ze^2\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right) + \frac{e^2}{r_1 + r_2}$$

по r_1 и r_2. Минимумът на енергията се реализира при

$$r_1 = r_2 = \frac{\hbar^2}{me^2}\frac{1}{Z - 1/4},$$

което за хелия дава $< r^2 > \approx < r >^2 \approx 0{,}9.10^{-21}$ m^2 и $\chi \approx -0{,}64.10^{-11}\ \dfrac{\text{m}^3}{\text{mol}}$ при експериментална стойност $\chi_{exp} = -2{,}4.10^{-11}\ \dfrac{\text{m}^3}{\text{mol}}$. Получената оценка може да се счита за добра, като се отчете простотата на разгледания модел.

Разликата между оценката и експерименталната стойност се дължи на замяната $< r^2 > \approx < r >^2$. Както е показано в [6], чрез използване на водородоподобни функции

$$< r^2 > \approx 3 < r >^2$$

и тогава имаме оценката $\chi \approx -1{,}9.10^{-11}\ \dfrac{\text{m}^3}{\text{mol}}$.

5. СРАВНЯВАНЕ НА ЯДРЕНОТО И ЕЛЕКТРИЧНОТО ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ

Енергията на взаимодействие между протон и неутрон в ядрото зависи от разстоянието rмежду тях и се описва с израза

$$U(r) = -U_0\frac{e^{-r/r_0}}{r/r_0},$$

където $r_0 = 1{,}3.10^{-15}$ m. Той е предложен от Х. Юкава през 1935 г. При определени стойности на U_0 протонът и неутронът могат да се намират в свързано състояние, като образуват деутрон по подобие на взаимодействащите си електрон и протон във водородния атом, където енергията на взаимодействието се дава с израза

$$U_{\text{кул}}(r) = -\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 r} = -\frac{e^2}{r}.$$

Тук $q = 1{,}60.10^{-19}$ C е елементарният електричен заряд, а $\varepsilon_0 = 8{,}85.10^{-12}$ F.m^{-1} – електричната константа. Двете взаимодействия ще сравним, като оценим с помощта на съотношенията за неопределеност на Хайзенберг минималната стойност на U_0, при която възниква деутрон, и ще я интерпретираме в термини на елементарен електричен заряд.

При неподвижен център на масите енергията на системата от протон и неутрон се дава с израза

$$E = \frac{p^2}{2\mu} + U(r) = \frac{p^2}{M} - U_0 \frac{e^{-r/r_0}}{r/r_0},$$

където е отчетено, че приведената маса на частиците е $\mu = M/2$. Съгласно съотношенията за неопределеност, ако R е средното разстояние между тях в образувал се деутрон, характерният им импулс $p \approx \hbar / R$. Тогава енергията на деутрона може да се запише във вида

$$E(\rho) = \frac{\hbar^2}{Mr_0^2\rho^2} - U_0 \frac{e^{-\rho}}{\rho},$$

където $\rho = R/r_0$. От условието за минимум на енергията $E'(\rho) = 0$ получаваме следното съотношение:

$$\frac{U_0}{2}\rho e^{-\rho}(1+\rho) = \frac{\hbar^2}{Mr_0^2},$$

което дава възможност да запишем енергията като

$$E(\rho) = -\frac{U_0 e^{-\rho}}{2\rho}(1-\rho).$$

Този израз е отрицателен при $\rho < 1$ и само тогава съществува деутрон.

От друга страна, функцията

$$f(\rho)=\frac{1}{2}\rho e^{-\rho}(1+\rho)$$

е растяща и има максимална стойност $f_{\max}$ = 1/e при ρ = 1. От условието за минимум се вижда, че при

$$U_0>U_{0,min}=\frac{\hbar^2}{Mr_0^2}e\approx 65\ \mathrm{MeV}$$

взаимодействието е достатъчно силно за образуване на деутрон. Тогава, ако запишем $U_0 r_0 = Q^2/4\pi\varepsilon_0$, за елементарния заряд Q, който характеризира силата на ядреното взаимодействие, получаваме

$$Q=\sqrt{4\pi\varepsilon_0 r_0 U_0}\approx 8q\ ,$$

т.е. ядрените сили са около 100 пъти по-интензивни от електричните.

6. СЛОЕСТ МОДЕЛ НА ЯДРОТО

Както е известно, ядрата на атомите са изградени от протони и неутрони (нуклони) с приблизително равни маси m_N = 1,67.10^{-27} kg. Те взаимодействат помежду си чрез ядрени сили, които определят радиуса на ядрата R в зависимост от масовото число A, като $R = r_0(A)^{1/3}$, r_0 = 1,3^{-15} m. Според слоестия модел нуклоните могат да се разглеждат като независими частици, които се намират в сферична потенциална яма с радиус R и дълбочина U. Те образуват слоеве от частици с една и съща енергия, които са запълнени аналогично на електронните слоеве в атомите.

Електроните, протоните и неутроните са частици с един и същ спин. За да оценим основните характеристики на ядрото $^{16}_{8}\mathrm{O}$ в слоестия модел, ще предположим, че протоните и неутроните се намират в потенциална яма с формата на куб с ръб a и дълбочина U_0. Размерът a се определя от изискването потенциалната яма с форма на куб да моделира сферично ядро със същия обем. Следователно имаме

$$a=\left(\frac{4\pi}{3}R^3\right)^{1/3}\approx(4A)^{1/3}r_0\ .$$

Възможните стойности на енергията на един нуклон в ядрото ще определим, отчитайки вълновите му свойства. В потенциалната яма с форма на куб един нуклон извършва три независими движения – по x, по y и по z, насочени перпендикулярно на стените на ямата. За всяко от независимите движения се формира стояща вълна на Дьо Бройл. Оценките за ядрото на кислород ${}^{16}_{8}\mathrm{O}$ ще направим при дълбочина на ямата U_0 = –53 MeV.

Енергията на един нуклон се определя с израза

$$\varepsilon = U_0 + \frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}{2m_N}.$$

Като отчетем за всяко независимо движение формулата на Дьо Бройл

$$p = \frac{2\pi\hbar}{\lambda}$$

(константата на Планк $\hbar = \dfrac{h}{2\pi} = 1{,}05.10^{-34}$ J.s), получаваме

$$\varepsilon = U_0 + \frac{4\pi^2\hbar^2}{2m_N}\left(\frac{1}{\lambda_x^2} + \frac{1}{\lambda_y^2} + \frac{1}{\lambda_z^2}\right).$$

Съгласно вълновите свойства на частиците възможните стойности на λ_x, λ_y, λ_z следват от формирането на стоящи вълни между всеки две стени на потенциалната яма:

$$n_x \frac{\lambda_x}{2} = a, \quad n_x = 1,2,3,\ldots$$

$$n_y \frac{\lambda_y}{2} = a, \quad n_y = 1,2,3,\ldots$$

$$n_z \frac{\lambda_z}{2} = a, \quad n_z = 1,2,3,\ldots$$

Тогава за възможните стойности на енергията на един нуклон в ядрото ${}^{16}_{8}\mathrm{O}$ получаваме

$$\varepsilon_{n_x,n_y,n_z} = U_0 + \frac{\pi^2\hbar^2}{2m_N a^2}\left(n_x^2 + n_y^2 + n_z^2\right) = U_0 + 0{,}31\frac{\hbar^2}{m_N r_0^2}\left(n_x^2 + n_y^2 + n_z^2\right).$$

Според принципа на Паули в дадено състояние с определени n_x, n_y, n_z могат да се намират най-много два протона с противоположни спинове и два неутрона с противоположни спинове. Така на енергетичното ниво $\varepsilon_{1,1,1}$ могат да се намират най-много два протона и два неутрона, а на нивото $\varepsilon_{2,1,1} = \varepsilon_{1,2,1} = \varepsilon_{1,1,2}$ – най-много шест протона и шест неутрона и т.н. За ядрото на кислород ${}^{16}_{8}\mathrm{O}$ изброените енергетични нива са изцяло запълнени, а останалите енергетични нива са празни. Енергията на основното състояние на ядрото (най-ниската възможна енергия от сумата на енергиите на отделните нуклони) за кислорода ${}^{16}_{8}\mathrm{O}$ е равна на

$$E_0 = 16U_0 + 0{,}31(4.3 + 12.6)\frac{\hbar^2}{m_N r_0^2} \approx -271\,\mathrm{MeV}.$$

Минималната енергия, която трябва да погълне ядрото, за да освободи нуклон, т.е енергията на свързване $E_{\text{св}}$, е

$$E_{\text{св}} = -\,\varepsilon_{2,1,1} \approx 12\ \mathrm{MeV},$$

а честотата на съответния фотон, който може да предизвика този преход, е

$$\nu_{\min} = \frac{E_{\text{св}}}{2\pi\hbar} \approx 3.10^{21}\ \mathrm{Hz}\,,$$

т.е. фотонът е γ-квант.

Предложеният вариант на слоестия модел е приложим за леките ядра, където изграждането на заетите енергетични нива съвпада с това на оригиналния модел.

В заключение трябва да се отбележи, че подобен тип оценки могат да се развият и за ефекти при неограничено движение на частиците, което ще бъде публикувано допълнително.

Благодарности. Настоящата работа е осъществена с подкрепата на фонд „Научни изследвания“ на Софийския университет „Св. Климент Охридски„, дог. 207/2011.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Mott, N. F. Elementary Quantum Mechanics. London and Winchester, 1972.
[2] Weisskopf, V. F. *Amer. J. Phys*., 1985, **53,** 206.
[3] Weisskopf, V. F. *Amer. J. Phys.*, 1985, **53,** 304.
[4] Ландау, Л. Д., Е. М. Лифшиц. Квантовая механика, Москва, Наука, 1974.
[5] Crawford, F. S. *Amer. J. Phys*., 1982, **50,** 514.
[6] Ter-Haar, D. Selected Problems in Quantum Mechanics, London, 1964.