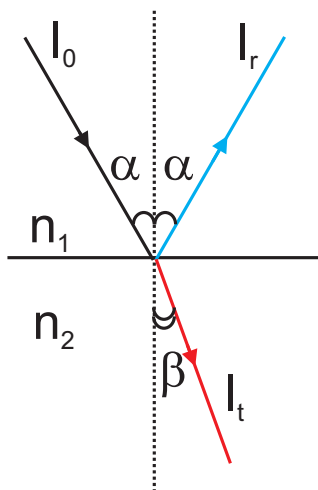


# Глава 11

## Често използвани формули и дефиниции

### 11.1 Пречупване на светлината от повърхност



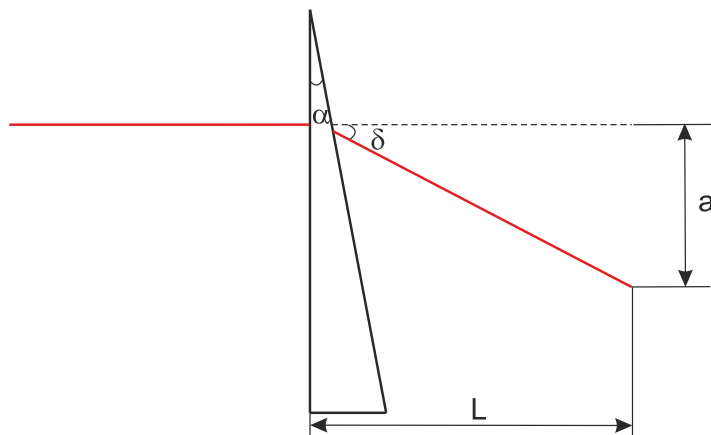
Фигура 11.1: Ход на лъчите при достигане на граница между две среди.

Закон на Снелиус:

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{n_2}{n_1} .$$

Пълно вътрешно отражение. Граничен ъгъл:

$$n_1 \sin \alpha = n_2 \sin 90^\circ \Rightarrow \alpha = \arcsin \left( \frac{n_2}{n_1} \right) .$$



Фигура 11.2: Отместване на лъч при преминаване през призма.

**Тънка призма.** Връзка между пречупващия ъгъл  $\alpha$  на призмата и ъгълът на отклонение  $\delta$ :

$$\delta \approx (n - 1)\alpha .$$

Дефиниция на призмен диоптър:

$$P = 100 \operatorname{tg} \delta \approx 100(n - 1)\alpha ,$$

$$P = 100 \frac{a \text{ [m]}}{L \text{ [m]}} = \frac{a \text{ [cm]}}{L \text{ [m]}} .$$

**Число на Аббе:**

$$\nu = \frac{n_D - 1}{n_F - n_C} .$$

## 11.2 Огледала

**Фокус на сферично огледало:**

$$f = -\frac{R}{2} .$$

**Уравнение на сферично огледало:**

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x'} = \frac{1}{f} .$$

Таблица 11.1: Конвенция за знаците при сферично огледало:

Величина	+	-
радиус, $R$	център вдясно от $V$	център вляво от $V$
разстояние до предмета, $x$	вляво от $V$	вдясно от $V$
разстояние до образа, $x'$	вляво от $V$	вдясно от $V$
фокусно разстояние, $f$	$F$ вляво от $V$	$F$ вдясно от $V$
височина, $y, y'$	над оптичната ос	под оптичната ос
увеличение, $M$	прав образ	обърнат образ

Увеличение при сферично огледало:

$$M = \frac{y'}{y} = -\frac{x'}{x} = \frac{f}{f - x}.$$

### 11.3 Сферични повърхнини

Фокусни разстояния на пречупваща повърхнина:

$$f = R \frac{n_1}{n_2 - n_1} = \frac{n_1}{\Phi},$$

$$f' = R \frac{n_2}{n_2 - n_1} = \frac{n_2}{\Phi}.$$

Таблица 11.2: Конвенция за знаците при сферична повърхност:

Величина	+	-
радиус, $R$	център вдясно от $V$	център вляво от $V$
разстояние до предмета, $x$	вляво от $V$	вдясно от $V$
разстояние до образа, $x'$	вдясно от $V$	вляво от $V$
предно фокусно разстояние, $f$	$F$ вляво от $V$	$F$ вдясно от $V$
задно фокусно разстояние, $f'$	$F'$ вдясно от $V$	$F'$ вляво от $V$
височина, $y, y'$	над оптичната ос	под оптичната ос
увеличение, $M$	прав образ	обърнат образ

Оптична сила на пречупваща повърхнина:

$$\Phi = \frac{n_2 - n_1}{R}.$$

Уравнение на пречупваща повърхнина:

$$\frac{f}{x} + \frac{f'}{x'} = 1$$

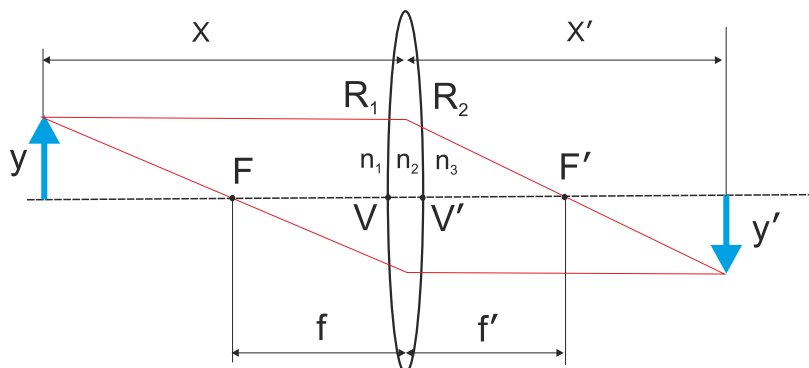
или

$$\frac{n_1}{x} + \frac{n_2}{x'} = \Phi .$$

Увеличение на пречупваща повърхнина:

$$M = \frac{y'}{y} = \frac{f}{f - x} .$$

## 11.4 Тънки лещи



Фигура 11.3: Ход на лъчите при тънка събирателна леща.

Фокусно разстояние на тънка леща в нееднородна среда:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{R_1} \left( \frac{n_2 - n_1}{n_1} \right) - \frac{1}{R_2} \left( \frac{n_2 - n_3}{n_1} \right) ,$$

$$\frac{1}{f'} = \frac{1}{R_1} \left( \frac{n_2 - n_1}{n_3} \right) - \frac{1}{R_2} \left( \frac{n_2 - n_3}{n_3} \right) .$$

Фокусно разстояние на тънка леща в еднородна среда ( $n_1 = n_3 \neq 1$ ):

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f'} = \frac{n_2 - n_1}{n_1} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) .$$

**Фокусно разстояние на тънка леща във въздух ( $n_1 = n_3 = 1$ ):**

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f'} = (n_2 - 1) \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) .$$

**Таблица 11.3:** Конвенция за знаците при тънка леща:

Величина	+	-
радиус, $R_1, R_2$	център вдясно от $V$	център вляво от $V$
разстояние до предмета, $x$	вляво от $V$	вдясно от $V$
разстояние до образа, $x'$	вдясно от $V$	вляво от $V$
предно фокусно разстояние, $f$	$F$ вляво от $V$	$F$ вдясно от $V$
задно фокусно разстояние, $f'$	$F'$ вдясно от $V$	$F'$ вляво от $V$
височина, $y, y'$	над оптичната ос	под оптичната ос
увеличение, $M$	прав образ	обърнат образ

**Оптична сила на тънка леща в нееднородна среда:**

$$\Phi = \frac{n_1}{f}$$

или

$$\Phi = \frac{n_3}{f'} .$$

**Оптична сила на тънка леща във въздух ( $n_1 = n_3 = 1$ ):**

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f'} = \Phi .$$

**Уравнение на тънка леща в нееднородна среда:**

$$\frac{n_1}{x} + \frac{n_2}{x'} = \Phi .$$

**Уравнение на тънка леща във въздух ( $n_1 = n_3 = 1$ ):**

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x'} = \frac{1}{f} = \Phi .$$

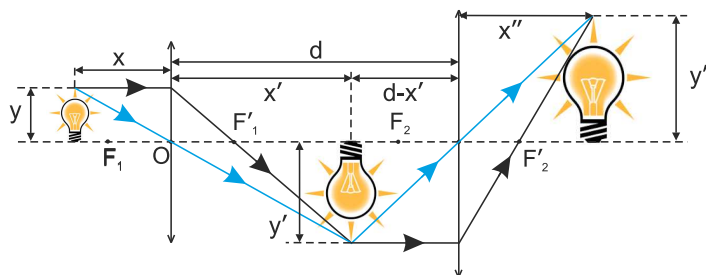
**Увеличение на тънка леща:**

$$M = \frac{f}{f - x} = \frac{f' - x'}{f'} = \frac{y'}{y} .$$

Опрефеляне на фокусното разстояние по метода на увеличението:

$$f = \frac{|M|L}{(1 + |M|)^2} .$$

## 11.5 Системи от тънки лещи



Фигура 11.4: Система от тънки лещи.

Намиране на положението на образа на обект, получен от система от тънки лещи:

$$x'' = \frac{f_2 d - \frac{f_1 f_2 x}{x - f_1}}{d - f_2 - \frac{f_1 x}{x - f_1}} = \frac{f_2 (x d - f_1 d - f_1 x)}{x d - f_2 x - f_1 d + f_1 f_2 - f_1 x} .$$

Предна фокусна отсечка:

$$f_{\text{пр}} = \frac{f_1 (d - f_2)}{d - (f_1 + f_2)} .$$

Задна фокусна отсечка:

$$f_{\text{зад}} = \frac{f_2 (d - f_1)}{d - (f_1 + f_2)} .$$

Фокусно разстояние на система от тънки лещи при  $d = 0$ :

$$f = f_{\text{зад}} = f_{\text{пр}} = \frac{f_1 f_2}{f_1 + f_2} .$$

Увеличение на система от тънки лещи:

$$M = \frac{y''}{y} = M_1 M_2 ,$$

където

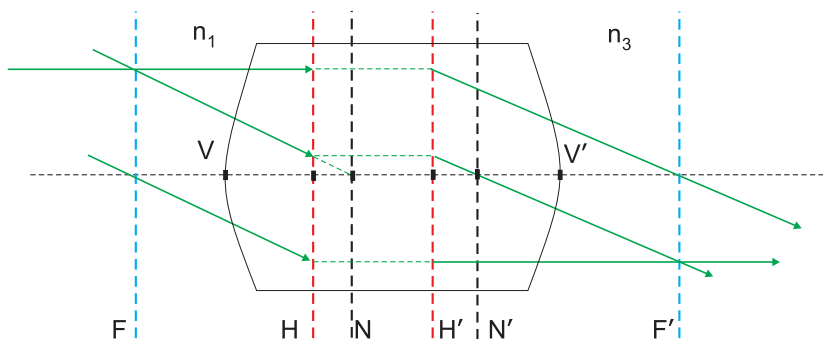
$$M_1 = \frac{f_1}{f_1 - x},$$

$$M_2 = \frac{f_2}{f_2 - d + x'}.$$

Алтернативна формула:

$$M = \frac{f_1 x''}{d(x - f_1) - x f_1}. \quad (11.1)$$

## 11.6 Кардинални точки и равнини



Фигура 11.5: Кардинални равнини в една оптична система.

**Върхни точки** – върховете на първата и последната пречупващи повърхности:  $V$  и  $V'$ .

**Преден фокус** – Лъчите от източник, поставен в предния фокус  $F$ , след преминаване през системата стават успоредни.

**Заден фокус** – Лъчи, успоредни на оптичната ос, след преминаване през системата се събират в задния фокус  $F'$ .

**Фокални равнини** – равнините, минаващи през фокусите на системата  $F$  и  $F'$  и перпендикулярни на оптичната ос.

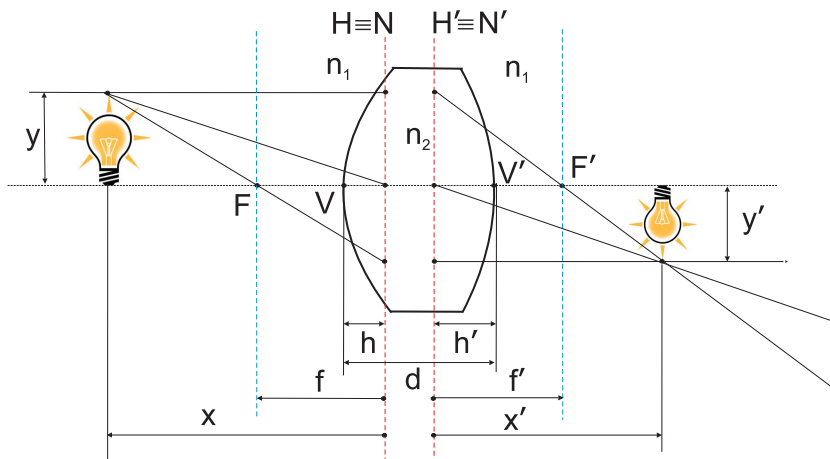
**Главни равнини** – Ако входящ лъч пресече предната главна равнина  $H$  на разстояние  $y$  от оптичната ос, той ще напусне задната главна равнина  $H'$  на същата височина (но е възможно да е под различен ъгъл). Главните равнини са перпендикулярни на оптичната ос.

**Главни точки** – точките  $H$  и  $H'$ , в които главните равнини пресичат оптичната ос.

**Възлови точки** – Ако входящ лъч (или продължението на лъч) пресича оптичната ос в предната възлова точка  $N$  под даден ъгъл, то той ще излезе от задната възлова точка  $N'$  под същия ъгъл.

**Възлови равнини** – равнините, минаващи през възловите точки на системата  $N$  и  $N'$  и перпендикулярни на оптичната ос.

## 11.7 Дебели лещи



Фигура 11.6: Ход на лъчите при дебела леща в еднородна среда.

**Фокусно разстояние на дебела леща в общия случай:**

$$\frac{1}{f} = \frac{n_2 - n_1}{n_1 R_1} - \frac{n_2 - n_3}{n_1 R_2} + \frac{d(n_2 - n_1)(n_2 - n_3)}{n_2 n_1 R_1 R_2},$$

$$\frac{1}{f'} = \frac{n_2 - n_1}{n_3 R_1} - \frac{n_2 - n_3}{n_3 R_2} + \frac{d(n_2 - n_1)(n_2 - n_3)}{n_2 n_3 R_1 R_2}.$$

**Фокусно разстояние на дебела леща във въздух ( $n_1 = n_3 = 1$ ):** :

$$\frac{1}{f} = (n - 1) \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} + \frac{(n - 1)d}{n R_1 R_2} \right).$$

**Оптическа сила на дебела леща:**

$$\Phi = \frac{n_1}{f} = \frac{n_3}{f'},$$

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 - \Phi_1 \Phi_2 \frac{d}{n}.$$

**Разстояние между върхните точки на дебела леща и главните равнини в общия случай:**

$$\overline{VH} = h = -\frac{f(n_2 - n_3)d}{n_2 R_2},$$

$$\overline{V'H'} = h' = -\frac{f'(n_2 - n_1)d}{n_2 R_1}.$$



Таблица 11.4: Конвенция за знаците при дебела леща:

Величина	+	-
радиус, $R_1$	център вдясно от $V$	център вляво от $V$
радиус, $R_2$	център вдясно от $V'$	център вляво от $V'$
разстояние до обекта, $x$	вляво от $H$	вдясно от $H$
разстояние до образа, $x'$	вдясно от $H'$	вляво от $H'$
височина, $y, y'$	над оптичната ос	под оптичната ос
предно фокусно разстояние, $f$	$F$ вляво от $H$	$F$ вдясно от $H$
задно фокусно разстояние, $f'$	$F'$ вдясно от $H'$	$F'$ вляво от $H'$
$\overline{VH} \equiv h$	$H$ вдясно от $V$	$H$ вляво от $V$
$\overline{V'H'} \equiv h'$	$H'$ вдясно от $V'$	$H'$ вляво от $V'$

Разстояние между връхните точки на дебела леща и възловите точки в общия случай:

$$\overline{HN} = f' \frac{n_3 - n_1}{n_3} = f \frac{n_3 - n_1}{n_1}, \quad (11.2)$$

$$\overline{H'N'} = f' \frac{n_3 - n_1}{n_3} = f \frac{n_3 - n_1}{n_1}. \quad (11.3)$$

Уравнение на дебела леща във въздух:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x'} = \frac{1}{f}.$$

Уравнение на дебела леща в общия случай:

$$\frac{n_1}{x} + \frac{n_3}{x'} = \Phi,$$

$$\frac{f}{x} + \frac{f'}{x'} = 1.$$

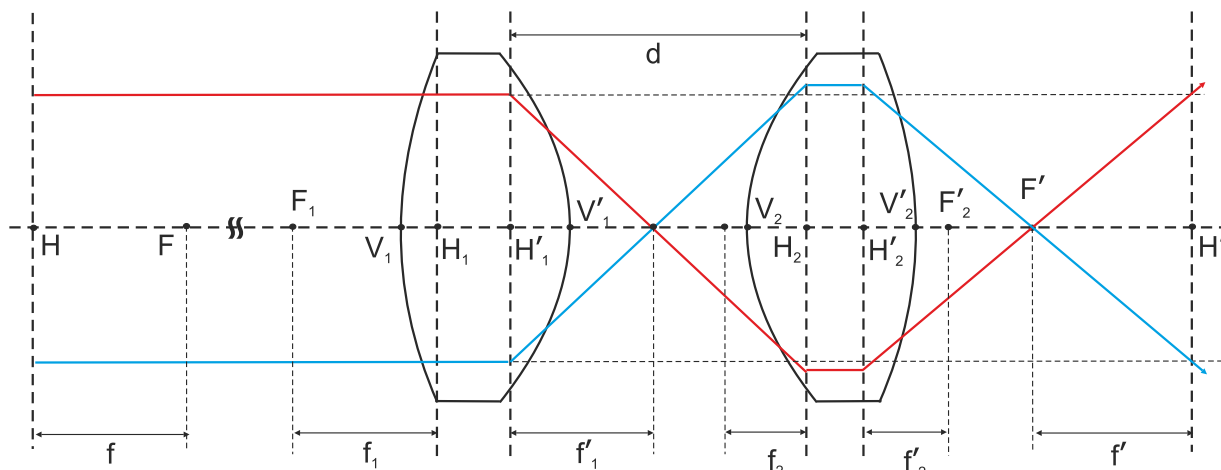
## 11.8 Системи от дебели лещи

Фокусно разстояние на система от дебели лещи във въздух:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{d}{f_1 f_2}.$$

Разстояние между предната главна равнина на първата леща и предната главна равнина на системата:

$$\overline{H_1 H} = \frac{fd}{f_2}.$$

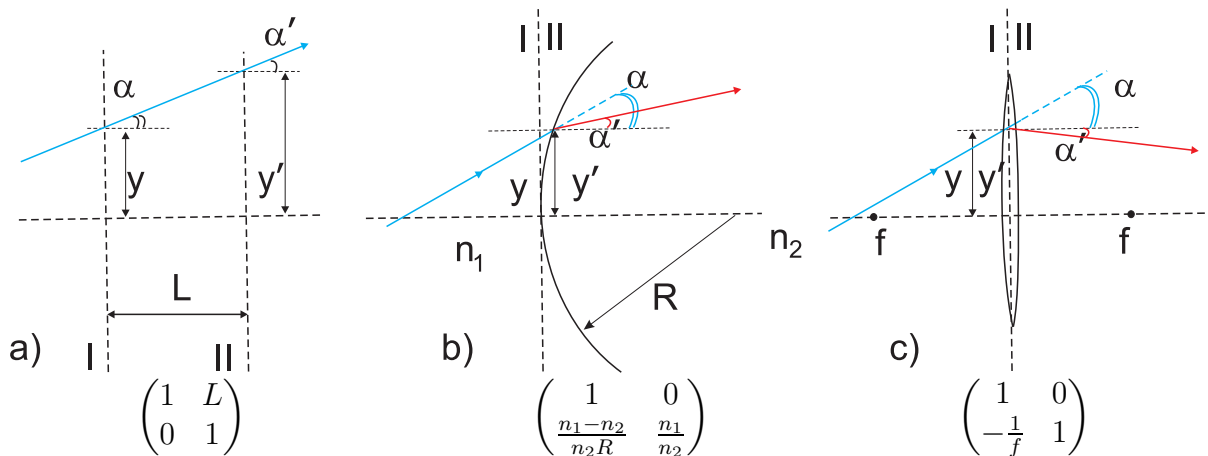


Фигура 11.7: Система от дебели лещи.

Разстояние между задната главна равнина на втората леща и задната главна равнина на системата:

$$\overline{H'_2 H'} = -\frac{fd}{f_1}$$

### 11.9 Матрична оптика



Фигура 11.8: Матрици на основни елементи в матричната оптика

Намиране на мястото на образа  $z'$  и неговото увеличение  $M$ :

$$z' = -\frac{Az + B}{Cz + D}$$

**Таблица 11.5:** Връзка между кардиналните точки на една система и елементите на нейната ABCD матрица.

Кардинални точки	Разстояние		Стойност	
	от	до	$n_1 \neq n_3$	$n_1 = n_3$
$F$	$H$	$F$	$-n_1/(n_3C)$	$-1/C$
$H$	$I$	$H$	$-(n_1 - n_3D)/(n_3C)$	$-(1 - D)/C$
$N$	$I$	$N$	$-(1 - D)/C$	$-(1 - D)/C$
$F'$	$H'$	$F'$	$-1/C$	$-1/C$
$H'$	$II$	$H'$	$(1 - A)/C$	$(1 - A)/C$
$N'$	$II$	$N'$	$(n_1 - n_3A)/(n_3C)$	$(1 - A)/C$

$$M = A + z'C = A - \frac{Az + B}{Cz + D}C .$$

Намиране на мястото на обекта:

$$z = -\frac{Dz' + B}{Cz' + A} .$$

## 11.10 Ъглово увеличение

Ъглово увеличение на телескоп:

$$M_\alpha = -\frac{f_1}{f_2} . \quad (11.4)$$

Ъглово увеличение на леща:

$$M_\alpha = \frac{fL}{fL + d^2 - dL} . \quad (11.5)$$

## 11.11 Зрителна острота

Връзка между  $\alpha_{\min}$ , линейните размери на предмета  $a$  и разстоянието до него  $L$ :

$$\frac{a}{L} = \operatorname{tg}\alpha_{\min} \approx \alpha_{\min} . \quad (11.6)$$

Десетична мярка за зрителна острота:

$$VA = \frac{1}{\alpha_{\min}} . \quad (11.7)$$

LogMAR мярка за зрителна острота:

$$\text{LogMAR} = \log_{10} \alpha_{\min} . \quad (11.8)$$

## 11.12 Децентриране на сферична леща

Призматичен диоптър от децентриране на сферична леща с пречупваща сила  $\Phi$  на разстояние  $a$ :

$$P_{\Delta} = 100a[\text{m}]\Phi = a[\text{cm}]\Phi . \quad (11.9)$$

## 11.13 Точки на близко и далечно виждане

$x_{\text{PR}}$  – разстояние между окото и точката на далечно виждане.

$x_{\text{PP}}$  – разстояние между окото и точката на близко виждане.

$\delta\Phi$  – необходима корекция, оптичен дефицит.

$\Delta\Phi$  – обем на акомодация.

Таблица 11.6: Връзка между  $x_{\text{PR}}$  и  $x_{\text{PP}}$  и  $\delta\Phi$  и  $\Delta\Phi$

Око	$x_{\text{PR}}$	$x_{\text{PP}}$
Еметропично ( $\delta\Phi = 0$ )	$\infty$	$\frac{1}{\Delta\Phi}$
Далекогледо ( $\delta\Phi > 0$ )	$-\frac{1}{\delta\Phi}$	$\frac{1}{\Delta\Phi - \delta\Phi}$
ако $\Delta\Phi > \delta\Phi$	$\infty$	$\frac{1}{\Delta\Phi - \delta\Phi}$
Късогледо ( $\delta\Phi < 0$ )	$-\frac{1}{\delta\Phi}$	$\frac{1}{\Delta\Phi - \delta\Phi}$

Таблица 11.7: Връзка между  $\delta\Phi$  и  $\Delta\Phi$  и  $x_{\text{PR}}$  и  $x_{\text{PP}}$

Око	$\delta\Phi$	$\Delta\Phi$
Еметропично ( $\delta\Phi = 0$ )	0	$\frac{1}{x_{\text{PP}}}$
Късогледо ( $\delta\Phi < 0$ )	$-\frac{1}{x_{\text{PR}}}$	$\frac{1}{x_{\text{PP}}} - \frac{1}{x_{\text{PR}}}$

## 11.14 Зависимост на корекцията от вертексното разстояние

$\Phi_0$  – необходима корекция при разстояние от лещата до окото  $d_0$ .  $\Phi$  – необходима корекция при разстояние от лещата до окото  $d$ :

$$\Phi = \frac{\Phi_0}{1 + \Phi_0(d - d_0)} . \quad (11.10)$$

## 11.15 Хроматични аберации

Разлика в пречупващите сили на тънка сферична леща за  $\lambda_F$  и  $\lambda_C$ :

$$\boxed{\Phi_F - \Phi_C = \frac{\Phi_D}{\nu}} . \quad (11.11)$$

Условие за намиране на оптичните сили на ахроматичен дублет:

$$\boxed{\frac{\Phi_{D1}}{\nu_1} = -\frac{\Phi_{D2}}{\nu_2}} . \quad (11.12)$$

## 11.16 Сферични аберации

Фактори на разстоянието и формата:

$$p = \frac{x' - x}{x' + x} ,$$

$$s = \frac{R_2 + R_1}{R_2 - R_1} .$$

Фокусно разстояние при периферни лъчи:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x'} = \frac{1}{f_0} + \frac{y^2}{f_0^3} \left( As^2 + Bsp + Cp^2 + D \right) , \text{ където} \quad (11.13)$$

$$A = \frac{n + 2}{8n(n - 1)^2} ,$$

$$B = \frac{n + 1}{2n(n - 1)} ,$$

$$C = \frac{3n + 2}{8n} ,$$

$$D = \frac{n^2}{8(n - 1)^2} .$$

Елиминирание/намаляване на сферичните аберации:

$$s_{min} = -\frac{pB}{2A} = -2p\frac{n^2 - 1}{n + 2}, \quad (11.14)$$

$$R_1 = \frac{2f_0(n-1)}{s+1}, \quad (11.15)$$

$$R_2 = \frac{2f_0(n-1)}{s-1}.$$

## 11.17 Дифракционна решетка

Условие за намиране на максимумите на дифракционна решетка с константа  $d$ :

$$d \sin \alpha_m = m\lambda. \quad (11.16)$$

## 11.18 Основни фотометрични величини

: |Светлинна интензивност  $I$  [cd]:

$$I = \frac{d\Phi}{d\Omega}, \quad (11.17)$$

светлинният поток  $\Phi$  [lm] в единица пространствен ъгъл. Ако източникът е изотропен:

$$I = \frac{\Phi}{4\pi}. \quad (11.18)$$

: |Осветеност  $E$  [lx]:

$$E = \frac{d\Phi}{dS}, \quad (11.19)$$

потокът падащ върху единица площ.

**Закон на Кеплер:**

$$E = \frac{I}{r^2}, \quad (11.20)$$

в сила е когато, повърхността се намира на разстояние  $r$  от източника и лъчите падат нормално към нея.

**Закон на Ламберт:**

$$E = \frac{I}{r^2} \cos \theta, \quad (11.21)$$

в сила е когато, повърхността се намира на разстояние  $r$  от източника, а лъчите падащи върху нея сключват ъгъл  $\theta$  с нормалата към повърхността.

: |Светимост  $M$  [lm/m<sup>2</sup>]:

$$M = \frac{d\Phi}{dS}, \quad (11.22)$$

светлинният поток, излъчван от единица площ.

: |Яркост  $L$  [cd/m<sup>2</sup>]:

$$L = \frac{I}{S} \cos \alpha, \quad (11.23)$$

светлинната интензивност към излъчващата площ  $S$ . Ъгъл  $\alpha$  е между посоката на излъчването и нормалата към излъчващата площ.

: |Светлинен добив  $\eta$  [lm/W]:

$$\eta = \frac{\Phi}{P}, \quad (11.24)$$

светлинният поток, който се пада на единица консумирана мощност.

**Връзка между енергетичните и светлинните величини:**

$$\Phi_\nu(\lambda) = K_m V(\lambda) \Phi_e(\lambda), \quad (11.25)$$

$\Phi_\nu(\lambda)$  – светлинен поток за дадена дължина на вълната  $\lambda$ ,

$\Phi_e(\lambda)$  – енергетичен поток за дадена дължина на вълната  $\lambda$ ,

$V(\lambda)$  – относителна спектрална чувствителност на окото за дадена дължина на вълната  $\lambda$ ,

$K_m = 683$  [lm/W] – максимална спектрална светлинна ефективност.