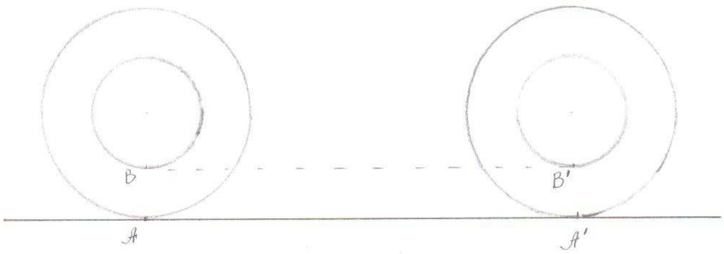
Парадокс на Аристотел

Случвало ли ви се е да наблюдавате паркиране на автомобил от неопитен шофьор? Ако колелото е на милиметър от бордюра на тротоара и долният ръб на декоративния тас на джантата се опира в него, движението се съпровожда от непоносим звук, какъвто се чува при стъргане с метал върху камък. Задавали ли сте си въпрос коя е причината за появата на този звук?

Преди повече от 23 века леки коли не е имало, но Аристотел[1], разсъждавайки върху характера на движението на телата, формулира парадокс, който е пряко свързан с описаното явление. Същността на парадокса се илюстрира с фиг. 1. На нея са изобразени две концентрични окръжности (автомобилното колело и декоративният тас на джан-



Фиг. 1.

тата). Т. *A* и т. *B* лежат на един вертикален радиус. Когато колелото направи един оборот, търкаляйки се *без приплъзване* надясно, т. *A* се оказва в т. *A*', а т. *B* – в т. *B*', като и т. *A*, и т. *B* отново лежат на вертикален радиус.

Ако радиусът на голямата окръжност е *R*, очевидно разстоянието *AA*' е $2\pi R$. От фигурата се вижда, че точно толкова е и разстоянието *BB*'. Обаче т. *B*, която също е направила един оборот, принадлежи на окръжност с някакъв по-малък радиус и нейната обиколка съответно е по-малка от $2\pi R$. Как при това положение т. *B* се е преместила на същото разстояние, на което се е преместила и т. *A*?

Това е и същността на парадокса на Аристотел. Обяснението му е в разликата между характера на движението на точката от голямата окръжност, която в даден момент се опира в правата *AA*', и на точката от малката окръжност, която в същия момент се опира в правата *BB*'. Всяка точка от двете окръжности участва едновременно в две движения: в постъпателното движение надясно, извършвано от центъра на окръжностите, и на въртеливото движение около този център. Съответно моментната скорост на всяка точка е сума от скоростите на тези две движения. За т. *A* тази сума е нула – скоростта на постъпателното движение е надясно, линейната скорост на въртеливото движение – в обратна посока и, щом няма приплъзване, големините на двете скорости са равни. (А за точката от голямата окръжност, диаметрално противоположна на т. *A*, двете скорости са еднопосочни и затова нейната моментна скорост е точно два пъти по-голяма от скоростта на движение на центъра.)

За т. *B* ситуацията е различна от тази за т. *A*. Скоростта на постъпателното движение на центъра е, разбира се, същата, но линейната ѝ скорост наляво е различна по големина, защото линейната скорост на въртеливо движение се описва с формулата ωr, където ω е ъгловата скорост, а r – разстоянието до центъра. (Ъгловата скорост е еднаква за всички точки на двете окръжности, но r е различно.) Тъй като $r < R$, сумата от двете скорости за т. *B*' е насочена надясно, т.е. движението на тази точка е с приплъзване по

[1] Парадоксът носи името на Аристотел, защото според М. Гарднер (*Крестики-нолики*, М., “Мир”, 1988.) за пръв път се споменава в *Механика*-та, авторството на която обикновено се приписва на този древногръцки философ. С парадокса са се занимавали известни учени като Галилей, Ферма, Декарт и др.

правата *BB'*. Именно това е разликата в характера на движенията на т. *A* и на т. *B*. На това приплъзване се дължи и режещият звук, за който стана дума в началото.

Интересно е, че математиците имат малко по-друг поглед върху парадокса. За тях същественото е, че във всеки момент върху радиуса, който свързва центъра на колелото и точката на допира му до земята има една и само една точка от малката окръжност. С други думи, съществува взаимно еднозначно съответствие между точките на две окръжности с различни радиуси, а оттук – **като че ли** – и равенство между *дължините* на двете окръжности. Разбира се, трябвало е да изминат повече от 20 века, преди математиците да докажат, че "броят" на точките върху две линии е един и същ, независимо от дължините им (както те се изразяват: *мощностите на множествата от точките в тези случаи са еднакви* – това е мощността на континуума).

Една по-друга гледна точка. Че, когато колелото се върти плътно до тротоара, ръбът на декоративния тас трябва да стърже по бордюра, се убеждаваме и без да се позоваваме на връзката между радиуса, ъгловата и линейната скорост. Достатъчно е да използваме ме*тода на екстремните стойности*. В случая, представете си, че оста на колелото е издадена от равнината на самото колело и е **безкрайно тънка**, т.е. – с нулев радиус, а в допълнение височината на бордюра е равна на радиуса на колелото. Очевидно е, че в този случай оста извършва постъпателно движение, **хлъзгайки се** по бордюра със скорост, равна на скоростта на автомобила. Също така е очевидно, че хлъзгане (т.е. – наличие на стържещ звук) ще има и при много малък радиус на оста (или малък радиус на декоративния тас) и същевременно – малко по-нисък бордюр, но в този случай – хлъзгането е с по-малка скорост. Ако радиусът расте (а бордюрът се снишава), неприятният звук намалява и когато радиусът на таса стане равен на радиуса на колелото, изчезва, защото точката, която е в допир със земята, е неподвижна.