

Парадокс на Архимед, или може ли крайцер да плува в кофа вода¹?

Ако въпросът се схване буквално, т.е. ако схващаме водата като тяло с определени форма и размери (формата и размерите на кофата), отговорът е очевидно отрицателен – няма как да се натопи огромен крайцер в кофа с вода. Ако обаче разбираме водата само като определено количество – примерно 10 литра, отговорът не е толкова очевиден и по въпроса в интернет се срещат най-различни мнения и дискусии – някои от тях по-повърхностни, други – по-задълбочени.

Тук предлагаме едно разсъждение, което **формално** води до заключението, че 10 литра вода са достатъчни, за да плува в тях крайцер. За да стане ясно по принцип на какво се опира подобно парадоксално заключение ще припомним какво гласи законът на Архимед²:

На всяко потопено в течност тяло действа изтласкваща сила, равна на теглото на изместената от тялото течност.

Това означава, че ако искаме да определим дали тялото плава или потъва, трябва да сравним силата на тежестта, която му действа, с теглото на водата, която **би изпълнила** обем, равен на обема на потопената част от тялото. Нито в закона, нито при това сравняване не става дума за количеството течност, която е около тялото – формално то би могло да бъде произволно малко.

За да стигнете до положителния отговор на поставения в заглавието отговор, разсъждавайте по следния начин.

Представете си крайцера, плаващ в езеро. Представете си също така, че водата в езерото започне постепенно да замръзва от бреговете навътре и от дъното нагоре. В началото водата около крайцера е достатъчно и той продължава да плава, защото теглото на изместената от него вода продължава да е равно на тежестта му. По-нататък замръзването на езерото продължава, но по много специален начин: така, че когато ледът доближи кораба, във всеки момент дебелината на водния слой между леда и обшивката е една и съща, макар и намаляваща с времето. (С други думи в леда се образува вдлъбнатина, точно повтаряща формата на потопената част на кораба – нещо като леярска форма, в която може да се отлее копие на тази потопена част.)

Ясно е, че при продължаване на този процес на замразяване, незамръзналият воден слой между кораба и леда изтънява, количеството вода в него намалява, но корабът продължава да плува в нея. Ясно е също така, че ще настъпи момент, когато количеството вода ще стане равно и дори по-малко от водата в кофата – и въпреки това крайцерът ще продължи да плава!

Именно този парадоксален резултат носи името **парадокс на Архимед**.

А какъв е неформалният отговор? Нека конкретизираме ситуацията. Да предположим, че масата на крайцера³ е $M = 30\,000\text{ t} = 3 \cdot 10^7\text{ kg}$. Формата на потопената част на кораба е сложна, но ще я приемем за паралелепипед с дължина 100 m и широчина 30 m, т.е. площта на хоризонталното сечение (дъното) е $S_1 = 100 \times 30 = 3 \cdot 10^3\text{ m}^2$.

Да пресметнем първо дълбочината h , на която “гази” крайцерът. Ако означим с $\rho = 10^3\text{ kg/m}^3$ плътността на водата, условието за плаване е:

$$Mg = \rho g S_1 h, \quad \text{откъдето} \quad h = \frac{M}{\rho S_1} = \frac{3 \cdot 10^7}{10^3 \cdot 3 \cdot 10^3} = 10\text{ m}.$$

¹ На български изразите *кофа вода* и *кофа с вода* не са равностойни. В първия случай се фиксира количеството на водата – примерно 10 л, а във втория – и формата, която кофата придава на това количество.

² Вж. напр. *Физика и астрономия*, 8. клас, С., Просвета, 2009.

³ Представите ми за тонажите и размерите на крайцерите са доста мъгляви, затова предварително моля извинение, ако използваните числа са далеч от действителността. Все пак се надявам да не съм сгрешил с порядъци!

Тъй като периметърът на хоризонталното сечение на паралелепипеда е $L = 2.100 + 2.30 = 260$ m, околната повърхност на потопената част е $S_0 = Lh = 260.10 = 2,6.10^3$ m². Като добавим към нея и площта на дъното, получаваме, че общата площ на потопената част на кораба е $S = 2,6.10^3 + 3.10^3 = 5,6.10^3$ m². Обемът на кофа вода е примерно $V_0 = 10$ l = 10^{-2} m³. Да пресметнем сега дебелината d на водния слой, който би се получил, ако разстелем 10 l вода на площ S :

$$d = \frac{V_0}{S} = \frac{10^{-2}}{5,6.10^3} \approx 10^{-6} \text{ m.}$$

Това означава, че когато количеството не замръзнала вода между кораба и леда стане 10 l, между обшивката на краба и повърхността на леда се поместват от порядъка на $10^3 - 10^4$ водни молекули, т.е. между тях има толкова мономолекулни водни слоя. Отново формално погледнато, според закона на Архимед като че ли има достатъчно вода за плаване на кораба. Все пак редица въпроси остават без отговор. Тъй като законът на Архимед е следствие от закона на Паскал, можем ли да разчитаме, че последният е валиден и за слой течност с дебелина 1 μ m? А каква е ролята на ред други ефекти, които имат значение при подобни дебелини – напр. повърхностното напрежение, капилярните ефекти? Разбира се, разсъждавайки така, ние не обръщаме внимание на практическата невъзможност да се създаде леярска форма, която с точност, по-добра от 1 μ m, да повтаря формата на крайцера, на трудностите за точното му балансиране във вдлъбнатината на формата и т.н.

Така че отговорът на поставения в заглавието въпрос би трябвало да изглежда така: плаването на крайцер във водата от една кофа е практически невъзможно, а теоретически – неясно.

Всеки, който се интересува от проблема, може да проследи една оживена дискусия по него на адрес <http://www.wiskit.com/marilyn/battleship.html>.

И още по въпроса. Обърнете внимание: във формулировката на закона на Архимед се говори за “...теглото на изместената от тялото течност”, а в поясняващия го веднага след това коментар – за “...теглото на водата, която **би изпълнила** обем, равен на обема на потопената част от тялото”. Двата израза не са равностойно – това, както и евентуалните последствия от смесването им, се изяснява в *Парадокса на Луис Карол* (вж. съответния файл).