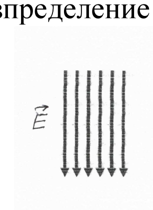
Една задача – две решения

Често при анализ на определени физични ситуации, за да избегнем усложнения от второстепенни фактори, вместо реалните обекти разглеждаме идеализирани техни модели, в които тези фактори отсъстват. Типичен пример в това отношение е плоският кондензатор: за да анализираме характера на полето между електродите му, ние пренебрегваме ръбните ефекти, т.е. – представяме си, че размерите на електродите са много по-големи от разстоянието между тях, в идеалния случай – безкрайно по-големи. Подобна идеализация обаче може да се окаже нож с две остриета, за което свидетелства следната задача.

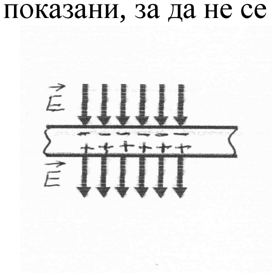
Задача. Две успоредни безкрайни метални плочи се поставят в хомогенно електрично поле, чиито интензитет $\vec{E}$ е перпендикулярен на плочите. Намерете интензитета на полето в различните части на пространството след внасяне на плочите.

Според условието на задачата трябва да си представяме, че в началото имаме хомогенно електрично поле, например като това, чиито силови линии са изобразени на фиг. 1. Ще покажем, че в зависимост от начина, по който внасяме двете метални плочи, крайното разпределение на полето може да бъде различно.



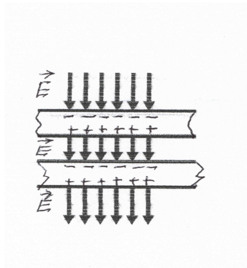
Фиг. 1.

Първо решение. Нека първо внесем в полето едната плоча. Тъй като в нея има свободни заряди (метална е!), външното поле индуцира върху двете повърхности на плочата равни по големина и с противоположни знаци заряди. Вътре в плочата посоките на полетата на индуцираните заряди са еднопосочни и противоположно насочени на началното поле. Количествата на индуцираните заряди (за да бъдем точни – повърхнинните им плътности) са такива, че тяхното общо поле вътре в плочата компенсира външното поле и там интензитетът на полето е нула (както и следва да бъде в хомогенен проводник, намиращ се в електростатично поле). Извън плочата (над и под нея) посоките на полетата на индуцираните заряди са противоположни, компенсират се помежду си и затова там остава само външното поле, непроменено – ситуацията, показана на фиг. 2. (Силовите линии на полетата на индуцираните заряди не са показани, за да не се претрупва фигурата.)



Фиг. 2.

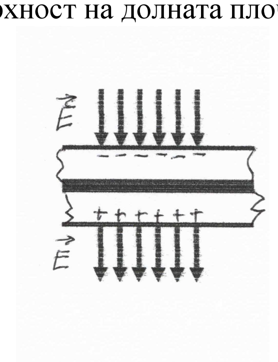
Когато внасяме в полето втората плоча, тя се оказва в абсолютно същото положение, в което се намираше и първата при нейното внасяне. Следователно и резултатът ще бъде същия – вътре в плочата поле няма, над и под нея полето не се променя. Крайната ситуация, силовите линии на полето след внасяне и на втората плоча, е показана на фиг. 3.



Фиг. 3.

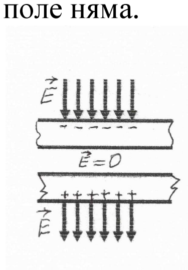
И така, при такава последователност на внасяне на плочите в полето, резултатът е: вътре в плочите поле няма, извън тях полето е същото, каквото бе преди внасянето им.

Второ решение. Да си представим сега, че внесем в полето двете плочи едновременно, но долепени една до друга. Със същите разсъждения, които по-горе направихме при внасяне на първата плоча, сега стигаме до заключението, че вътре в плочите поле няма, а над и под тях то е същото, както преди внасянето им – фиг. 4. На горната повърхност на горната плоча са индуцирани отрицателни заряди, а на долната повърхност на долната плоча – положителни заряди.



Фиг. 4.

Какво ще стане при раздалечаване на плочите? Отговорът е – нищо, в смисъл, че нови заряди няма как да се появят, защото на свободните заряди, намиращи се на долепените повърхности на плочите, не действат електрични сили. Индуцирани заряди могат да се появят само върху повърхност, която се поставя в електрично поле. Затова сега ситуацията е като показаната на фиг. 5: над горната плоча и под долната плоча полето е същото, както преди внасянето им, а в плочите и **в пространството между тях поле няма**. Този резултат може да се обясни със свойството на металите да екранират електричното поле: двете плочи екранират пространството между тях и затова в него поле няма.



Фиг. 5.

На какво се дължи парадоксът? Ситуацията наистина е парадоксална: задачата е една, ситуацията, описана в условието изглежда напълно определена, а се оказва, че съществуват поне две решения, при това съществено различни – в единия случай поле между плочите има, в другия – няма. Нарушено е изискването за **единственост** на решението на една задача. Коя е причината за това странно положение?

Грубо казано, причината е в идеализациите: ние смятаме че и началното поле е хомогенно и се простира да безкрайност, и плочите са безкрайни. Самата тази постановка вече съдържа в себе си противоречие, защото не можем да отговорим на въпроса къде са били плочите преди да ги внасяме в полето – те просто няма от къде да дойдат, тъй като полето изпълва **цялото** пространство.

По-сериозният и научно обоснован отговор обаче се опира на теорията. Известно е, че и интензитетът на полето $\vec{E}(\vec{r})$, и неговият потенциал $\varphi(\vec{r})$, са решения на частни диференциални уравнения, в които зададени се смятат разпределенията на зарядите. Например във вакуум за обемни заряди с плътност $k(\vec{r}\,)$ тези уравнения имат вида:

$$\mathrm{div}\vec{E} = \frac{k(\vec{r}\,)}{\varepsilon_0} \qquad \text{и съответно} \qquad \Delta\varphi = -\frac{k(\vec{r}\,)}{\varepsilon_0}.$$

$$\mathrm{rot}E = 0$$

От теоретичната физика е известно, че тези уравнение имат **единствено** решение само при определени гранични условия. Част от тези условия се отнасят до разпределението на зарядите в безкрайност и точната им формулировка може да се намери във всеки по-прецизен учебник по електродинамика. Грубо можем да кажем, че когато зарядите, създаващи полето са разположени в *ограничена* пространствена област, то уравненията имат единствено решение. В нашия случай това условие не е изпълнено: източниците на хомогенното поле, което запълва *цялото* пространство са разположени в безкрайност. А щом условията за единственост на решението не са изпълнени, не е удивително, че при различни начини на създаване на системата и разпределението на полето е различно.