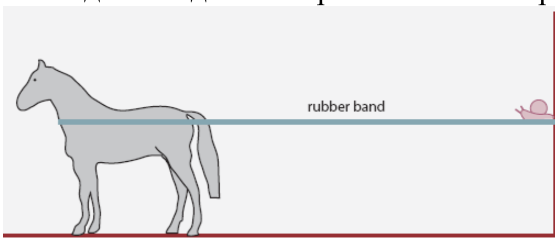
Охлюв гони вързан кон[1]

Задача. Кон е привързан за стена с еластична лента с начална дължина L (вж. фигурата) Свойствата на лентата са необичайни: нейният коефициент на еластичност е нула ($k = 0$), така че конят може да я разтяга неограничено без усилие. В един момент конят започва да се отдалечава от стената равномерно със скорост V. В същия момент от стената по лентата започва да пълзи охлюв с постоянна скорост v. Ще може ли охлювът да настигне коня? Ако да – след колко време и на какво разстояние от стената?



Качествено решение. Нека първо разгледаме случая, в който връзката между коня и стената е нееластична – например, ако към стената е прикрепена достатъчно голяма ролка тоалетна хартия, по която пълзи охлювът. При това положение скоростта на коня спрямо земята е V, скоростта на охлюва – $v + V$. Тъй като относителната скорост между тях е v, а началното разстояние – L, охлювът ще настигне коня след време $\frac{L}{v}$, като това време не зависи от скоростта на движение на коня. При скорост на охлюва – 1 mm/s, начална дължина на лентата – 1 m, охлювът ще възседне коня след 1000 s, т.е. – след само 16–17 минути.

Как се променя ситуацията, когато лентата е еластична? Преди всичко – сега привързаният за стената край е неподвижен, а другият край се отдалечава със скоростта V на коня. Всяка друга точка от лентата се движи със скорост, която е правопропорционална на разстоянието ѝ до стената (независимо кое – началното разстояние, или разстоянието в даден момент). Тъй като охлювът напредва по лентата, абсолютната му скорост (т.е. скоростта му спрямо земята) вече не е постоянна – тя расте, защото расте преносната скорост – скоростта на точката от лентата, върху която той се намира в дадения момент.

От тези разсъждения следва отговорът на първия въпрос в условието на задачата: щом конят се движи с постоянна скорост, а охлювът – с постоянно увеличаваща се скорост, охлювът непременно ще настигне коня. Отговорите на останалите въпроси обаче може да се получат само след количествено решаване на задачата, което, за съжаление, изисква прилагане на средства, излизащи извън рамките на програмата по математика в средното училище.

Количествено решение. Според условието на задачата в момента t след началото на движението конят е на разстояние:

(1) $$x' = L + Vt$$

от стената. Ако с $x(t)$ означим разстоянието в същия момент между охлюва и стената, точката от лентата, върху която е охлювът, се движи спрямо земята със скорост (преносната скорост):

(2) $$\frac{x}{L+Vt}V\,,$$

---

[1]Условието на задачата е от шесттомната физика на Кристофър Шилер *Motion Mountain*, който може да бъде изтеглена **безплатно** от адрес www.motionmountain.net. В книгата основите на физиката са поднесени по рядко срещан оригинален начин, с ударение върху основните понятия и идеи на науката.

така че скоростта на охлюва спрямо земята е $v+\dfrac{x}{L+Vt}V$. И тъй като, от друга страна, тази скорост е $\dfrac{dx}{dt}$, можем да запишем равенството:

(3) $$\frac{dx}{dt}=v+\frac{x}{L+Vt}V \ .$$

Законът за движение на охлюва е решение на това обикновено диференциално уравнение от първи ред. Ако помните как се решават подобни уравнения (напр. чрез полагане $x(t)=y(t)e^{\int\frac{Vdt}{L+Vt}}=y(t)\ln(L+Vt)$ и търсене решение за *y*, което удовлетворява началното условие *y*(0) = 0), намерете онова решение, за което *x*(0) = 0. Ако не помните, чрез диференциране и заместване просто проверете, че решението на (3) е:

(4) $$x=\frac{v}{V}\left(L+Vt\right)\ln\left(1+\frac{Vt}{L}\right).$$

Този израз потвърждава вече получения отговор на първия въпрос от условието на задачата: охлювът ще настигне коня, защото според (1) разстоянието между коня и стената расте линейно с времето, а според (4) охлювът се отдалечава от стената по-бързо (поради наличие на множителя $\ln\left(1+\dfrac{Vt}{L}\right)$, който с нарастване на времето ще стане по-голям от единица).

Момента t_0, в който охлювът настига коня, намираме, като приравним десните страни на равенствата (1) и (4):

(5) $$L+Vt_0=\frac{v}{V}\left(L+Vt_0\right)\ln\left(1+\frac{Vt_0}{L}\right).$$

Решението на това уравнение е:

(6) $$t_0=\left(e^{\frac{V}{v}}-1\right)\frac{L}{V}\,.$$

Търсеното разстояние x_0 до стената в момента на настигане намираме, като заместим (6) в (1):

(7) $$x_0=Le^{\frac{V}{v}}\,.$$

За да добием представа за порядъците на величините, ще се върнем към примера, който използвахме по-горе: начална дължина на лентата – 1 m, скорост на охлюва – 1 mm/s, а за скорост на коня ще приемем 1 m/s. Тъй като отношението между двете скорости е 1000, лесно се вижда, че броят на секундите, след които охлювът ще настигне коня, е 10 на степен повече от 400!!! Много ли е това или малко, личи от сравнението на това число с възрастта на Вселената, която е под 10^{18} секунди. Дори ако охлювът е „по-бърз” и пълзи със скорост 1 cm/s, за да настигне коня, ще са му необходими повече от 10^{43} секунди – отново много повече от възрастта на Вселената.

Каква впечатляваща разлика между двата случая: когато охлювът пълзи по тоалетна хартия, и когато пълзи по еластична лента!

И по-нататък. В началото на движението абсолютната скорост на охлюва е очевидно по-малка от абсолютната скорост на коня. Щом обаче охлювът все пак настига коня, трябва да съществува момент, в който двете скорости се изравняват и след който вече охлювът се движи (спрямо земята!) по-бързо от коня. Любителите на пресмятания може да потърсят в кой момент и на какво разстояние от стената абсолютните скорости на коня и на охлюва се изравняват.

Дискретизиран вариант[2]**.** Решаването на диференциално уравнение може да се избегне, ако проблемът се дискретизира: охлювът отново си пълзи с постоянна скорост v, но конят се движи скокообразно – през първата секунда е неподвижен, след което със скок удвоява началното разстояние L до стената и отново застава неподвижен. В края на втората секунда той отново прави скок с дължина L, спира и т.н. При това положение в интервала от време между n-тата и $(n+1)$-вата секунда разстоянието между коня и стената е постоянно и равно на nL.

Нека означим с $\Delta t = 1$ s интервала от време, през който коня с подскача. За този интервал охлювът пропълзява разстояние $v\Delta t$. При възприетите означения в края на първата секунда охлювът ще е изминал част от дължината на лентата, изразяваща се с дробта $\frac{v\Delta t}{L}$. През втората секунда дължината на лентата вече е $2L$, така че, движейки се със същата скорост, охлювът ще преодолее $\frac{v\Delta t}{2L}$-та част от новата дължина на лентата. По същия начин през третата секунда преодоляната част от общата дължина на лентата ще бъде $\frac{v\Delta t}{3L}$ и т.н.

Разсъждавайки по този начин, стигаме до извода, че в края на n-тата секунда охлювът ще е пропълзял $\frac{v\Delta t}{nL}$-та част от дължината на лентата, така че общата пропълзяна за n секунди част от разстоянието между охлюва и коня ще бъде:

(8) $$\frac{v\Delta t}{L}+\frac{v\Delta t}{2L}+\frac{v\Delta t}{3L}+\ldots+\frac{v\Delta t}{nL}=\frac{v\Delta t}{L}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}\right).$$

В дясната страна на (8) в скобите фигурира частичната сума:

(9) $$S_n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n},$$

на безкрайния *хармоничен* ред, за който е известно, че е **разходящ**. Това означава, че при достатъчно голямо n сумата на събираемите в скобата в дясната страна на (8) е по-голяма от $\frac{L}{v\Delta t}$ и следователно целият израз в лявата страна – по-голям от единица. Най-малката стойност на n, при която се случва това, определя момента, в който охлювът настига коня.

В нашия случай отношението:

$$\frac{L}{v\Delta t} = \frac{1\,\text{m}}{1\,\text{mm}} = 1000$$

е твърде голямо, поради което за частичните суми на хармоничния ред може да се използва приблизителната формула на Ойлер:

(10) $$S_n \approx \ln n + \gamma,$$

където $\gamma = 0{,}5772...$ е т.нар. константа на Ойлер. При това положение броят n на секундите, след изтичане на които охлювът настига коня, се определя от равенството:

(11) $$\ln n + \gamma = 1000.$$

Тъй като става дума за оценка на порядъци, γ може да се пренебрегне спрямо 1000 и в такъв случай отново получаваме, че изразено в секунди, времето, необходимо на охлюва за настигане на коня, е от порядъка на e^{1000}.

[2] Според Мартин Гарднер (вж. книгата му *Путешествие во времени*, М., „Мир", 1990) този вариант е предложен от Д. Уилкин от Нова Каледония и е публикуван през 1972 г. във френското списание *Science et Vie*.

В упоменатата книга на Гарднър е разгледан случай, в който началната дължина на лентата е 1 km, а отношението $\dfrac{L}{v\Delta t}$ е не 1000, а 100 000. За този случай един от читателите е пресметнал, че ако началното напречно сечение на еластичната лента е 1 km^2 (!!!), в момента, когато охлювът настигне коня, лентата ще изтънее до пунктирана линия, състояща се от отделни атоми, разстоянията между които многократно надминават съвременните размери на Вселената! (Как се пълзи по подобна лента не се коментира.)