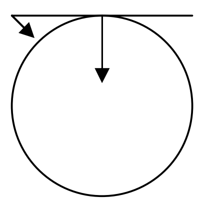
Топка върху маса

Задача. На ръба на идеално плоска, идеално хоризонтална маса е закрепена идеално кръгла топка. Двете тела са идеално твърди и идеално гладки. Ще извърши ли топката някакво движение и ако да – в какви времеви мащаби. (Не става дума за квантови ефекти, статистически флуктуации и др. п. – чиста класика! Масата и топката са във вакуум, така че и съпротивление няма.)

Качествено решение. Първо – да поясним защо елиминираме квантовите ефекти: известно е, че поради съотношенията за неопределеност, в зависимост от разстоянието до ръба на масата, рано или късно топката ще падне на пода. При разстояния от порядъка на милиметри и маси от порядъка на килограм обаче, времевите мащаби, в които би се осъществило това движение (доколкото си спомням) са на порядъци по-големи от възрастта на Вселената.

Че топката ще се затъркаля към центъра на масата може да се досетим, като съобразим, че средата на масата се намира малко по-близо до центъра на Земята, отколкото края на масата и следователно силата на тежестта, която действа на топката е по-голяма в центъра на масата. Верният отговор – че топката ще извърши хармонично движение с период около 84 минути и амплитуда, равна на половината от дължината на масата, ще си спомни всеки, който е разглеждал Задача 29[1] за влак, движещ се без триене и съпротивление по прав тунел, свързващ две точки от земната повърхност при предположение, че Земята е хомогенно кълбо. (Не цитирам далеч по-пълната и по-интересна книга на Перелман "Занимателна физика", защото и българското, и руските й издания са вече библиографска рядкост.) Същият е и периодът на движение на тяло, свободно падащо в тунел, свързващ две диаметрално противоположни точки от земната повърхност.

На фигурата окръжността изобразява земната повърхност, отсечката – масата. В края и в средата на масата са изобразени векторите на земното ускорение: насочени към центъра на Земята, но единият по-дълъг от другия, защото средата на масата се намира по-близо до този център.



От чертежа е ясно, че във всяка точка от масата (с изключение на средата й) земното ускорение има хоризонтална компонента, насочена към средата. Не е трудно да се съобрази, че в рамките на едно линейно приближение големината на това ускорение е пропорционална на разстоянието до средата. А това са двете условия, гарантиращи, че под действие на силата на тежестта топката ще започне да се търкаля и да извършва хармонично трептене около средата на масата.

Разбира се, качественото разглеждане не може да даде отговор на втория въпрос – в какъв времеви мащаб ще се извършва движението. За да се получи формулата за периода $T = \pi\sqrt{\dfrac{R}{g}}$ (тук R е радиусът на Земята, g – земното ускорение) е необходимо количествено разглеждане като направеното в цитирания източник.

Оценка. Доколко реална е подобна ситуация? В условието на задачата няколко пъти се споменава думата *идеално*. Да оставим настрана въпросите за идеалната твър-

---

[1] **Попов Хр.** *53+15 решени физични задачи*, С., Просвета, 2000.

дост, идеалното хоризонтиране на масата, липсата на триене и съпротивление. Да видим дали *идеалната гладкост* няма да провали решението, защото знаем, че телата имат дискретна структура и една миниатюрна издатина на масата, например, винаги може да подпре топката и да спре търкалянето.

За да оценим доколко реална е задачата в този аспект, ще оценим разликата в големината на земното ускорение в средата и в края на масата. Тъй като средата на масата се намира на разстояние R от центъра на Земята, земното ускорение там е $g = G\frac{M}{R^2}$, където G е гравитационната константа, а M – масата на Земята. Ако дължината на масата е L, питагоровата теорема гарантира, че краят на масата е на разстояние $\sqrt{R^2 + \left(\frac{L}{2}\right)^2}$ от центъра на Земята и следователно земното ускорение там е:

$$g' = G\frac{M}{\left(R^2 + \frac{L^2}{4}\right)} = G\frac{M}{R^2}.\frac{1}{1+\left(\frac{L}{2R}\right)^2} \approx g\left(1 - \frac{L^2}{4R^2}\right).$$

Следователно относителната разлика в големините на земното ускорение в средата и в края на масата е:

$$\frac{\Delta g}{g} = \left(\frac{L}{2R}\right)^2.$$

При R = 6,4.10^6 m и една маса с дължина L = 2 m, това отношение е от порядъка на 2.10^{-14}. Ако искаме топката да “усети” толкова малка разлика в стойностите на земното ускорение, отклоненията в гладкостта й (както и това на масата), не трябва да надминават тази величина. Ако радиусът на топката е 0,1 m, отклоненията от тази стойност за различните точки от повърхността на топката не бива да надминават 0,1.2.10^{-14} m = 2.10^{-15} m – това е величина от порядъка на размерите на атомното ядро. Тъй като размерите на самите атоми и на разстоянията между тях са поне пет порядъка по-големи, ясно е, че толкова гладки топка и маса по принцип не може да съществуват.