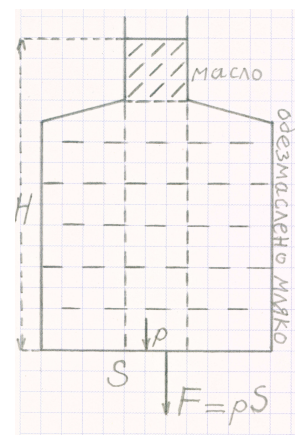


Парадокс на бутилката с мляко (или – да не забравяме закона на Паскал!)

Представете си, че напълните с мляко бутилката от фиг. 1. Тъй като млякото е смес от фракции с различни плътности, след известно време в гърлото на бутилката се отделя по-леката, маслената фракция – каймакът, а под нея остава по-тежкото, вече обезмаслено мляко.

Въпросът е: как отделянето на маслото влияе на налягането p върху дъното на бутилката – то расте, намалява, или остава непроменено?

Предварително ще припомним, че обемът на смес от течности не винаги е равен на сбора от обемите на съставките на сместа. В случая обаче този ефект се пренебрегва, което означава, че началното равнище на млякото в бутилката съвпада с равнището на горния край на отделения се каймак. (При това, за опростяване, смятаме, че маслото се отделя само в гърлото на бутилката. Разсъжденията не се усложняват съществено, ако това условие не е изпълнено.)



Фиг. 1

Елементарен (но погрешен) отговор. Неизkušеният в разplitане на привидно прости физични казуси човек може да се подведе от следното разсъждение. Нека бутилката е върху блюдото на уравновесена везна. Има ли основания да смятаме, че с отделянето на каймака равновесието ще се наруши? Очевидно не, защото общата маса на телата върху блюдото на везната не се е променила. Това твърдение до края ще ни служи като *аксиома*:

Отделянето на каймака не нарушава равновесието на везната.

Общото тегло на пълната бутилка обаче е сума от теглото P_0 на празната бутилка (тарата, ако използваме търговската терминология) и от натиска F на течността върху дъното на бутилката¹. Тарата не се променя, следователно не се променя и натискът, а тъй като и площта S на дъното си е една и съща ($F = pS$), заключението е, че отделянето на каймака *не променя налягането p на течността върху дъното*.

Този отговор е погрешен, като причината за това ще стане ясна по-долу.

По-детайлен (при това – правилен) отговор, който обаче води до парадокс.

Да отделим мислено в течността вертикален цилиндър, продължение на гърлото, чиято долна основа е върху дъното на бутилката (вж. фиг. 1). В началото млякото е хомогенно и този цилиндър съдържа в определено съотношение двете фракции на сместа. След изплуване на „леката фракция“, голямата част от нея, която в началото е била извън цилиндъра, сега се оказва вътре в него – в гърлото на бутилката. А това означава, че с отделяне на каймака *средната плътност* на течността в цилиндъра **намалява**. И понеже налягането върху дъното се описва с формулата $p = \rho gH$, в която земното ускорение g и височината H не се променят, следва да заключим, че намаляването на плътността ρ на течността в цилиндъра води до намаляване на налягането във всички точки от долната му основа. А като си спомним, че хидростатичното налягане в точките на една хоризонтална равнина трябва да е еднакво (в противен случай в течността ще започнат хоризонтални течения!), направеният извод може да се разпространи и за цялото дъно на бутилката. И така:

¹ Тук и нататък, когато говорим за сили, имаме предвид техните *големини*.

Отделянето на маслото в гърлото на бутилката предизвиква намаляване на налягането върху нейното дъно.

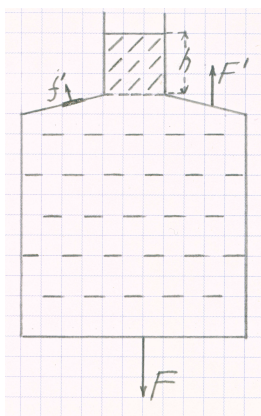
За какъв парадокс може да става дума в заглавието? Да проследим следното разсъждение.

Ако налягането на дъното наистина намалява, би намалил **натискът** на течността върху дъното на бутилката, а това от своя страна би нарушило равновесието на везната – влизаме в противоречие с „аксиомата“ – този извод е парадоксален! Единственото заключение, което можем да направим, е, че сме допуснали някакъв пропуск и проблемът по-нататък е да го разкрием.

Пропускът всъщност е в твърдението, което използвахме още в началното, „елементарното“ решение, а именно, че:

„Общото тегло на пълната бутилка ... е сума от теглото P_0 на празната бутилка ... и от натиска F на течността върху **дъното** на бутилката.”

Това изречение ще бъде вярно, ако изпуснем думата, която е в курсив. Какво се променя, ако отчитаме не само натиска на течността върху дъното, но и върху останалите части от бутилката? Заради симетрията спрямо оста на бутилката общият хоризонтален натиск върху вертикалните ѝ стени (включително и гърлото ѝ) е нула. Остава натискът върху онази част от бутилката, в която тя се стеснява и чрез която се свързва с гърлото. **Според закона на Паскал, във всяка точка на течността налягането се предава еднакво във всички посоки.** Следователно върху всеки малък участък от въпросната част действа натиск f' , чиято вертикална компонента е насочена **нагоре** (фиг. 2)! Хоризонталните компоненти на различните участъци отново се компенсират, но сумата от вертикалните дава една насочена нагоре сила F' , чието действие дотук използвахме. Затова, за да не **подвежда**, цитираното по-горе твърдение всъщност трябва да звучи по следния начин:



Фиг. 2

„Общото тегло на пълната бутилка ... е сума от теглото P_0 на празната бутилка ... и от разликата между натиска F на течността върху дъното на бутилката и натиска F' върху стесняващия се участък от бутилката.”

Като имаме предвид това, решението на парадокса става почти очевидно. Поради по-малката плътност на маслото е ясно, че с отделяне на каймака налягането в точките от стесняващия се участък **намалява** ($p = \rho gh!$). Натискът F' , дължащ се на това налягане, също намалява и компенсира намалението на натиска F върху дъното на бутилката, т.е. в процеса на отделяне на каймака **разликата** $F - F'$ остава постоянна. Този факт обяснява защо въпреки намалението на налягането при дъното на бутилката общото ѝ тегло не се променя и везната остава в равновесие.

Коментар. Резултатът от разглежданията дотук може да се резюмира

в следното твърдение, което също донякъде звучи парадоксално:

Натискът върху дъното на цилиндрична бутилка с течност е равен на теглото на течността само, когато равнището ѝ е под гърлото на бутилката. Ако течността навлиза в гърлото, натискът върху дъното е по-голям от теглото на течността.

Парадоксът на пълната бутилка може да се формулира още по-кратко, изчистен от намесата на всякакви млека, масла, разделяне на фракции и др.п.:

Натискът на течността в една пълна до ръба на гърлото ѝ бутилка върху дъното на бутилката е по-голям от теглото на течността.

Тези твърдения изглеждат парадоксални само за забравилите прочутия опит на Паскал (фиг. 3). Ученият взел здрава затворена бъчва, от чийто капак вертикално нагоре стърчала тясна, дълга няколко метра тръбичка. Напълнил бъчвата с вода до капака – нито капка не се процедила навън. След това чрез фуния напълнил тръбичката с водата от една кана. Резултатът за присъстващите бил изумителен: дъгите на бъчвата се издули навън и през получените цепнатини започнала да пръска във всички посоки вода.



Фиг. 3.

Само че в нашата „квантова“, „IT“ и каква ли не още ера, кому в училище остава време да разказва за опита на Паскал!?! Впечатляващата рисунка на този опит отдавна изчезна от учебниците и в тях остана само една суха формулировка на закона.

А ако някой не е разбрал каква е връзката между опита на Паскал и парадокса на бутилката с мляко, нека си представи бъчвата и тръбичката като екстремен случай на бутилка със стеснено гърло...

И по-нататък – от качествени към количествени разглеждания. Всичко изложено по-горе звучи логично, но „дали е така – кой да ти каже...?“ (Има подобна фраза в една от популярните песни на Васил Найденов.) С други думи, качествено парадоксът е обясним, но дали и в количествено отношение положението е същото? Отговорът на този въпрос като че ли не е прост, тъй като става дума не за локални величини, каквито са наляганията при дъното и в основата на гърлото на бутилката, а за глобалните сили F и F' , които зависят от такива фактори като формата на съда, площите на дъното и на стесняващата се част и т.н.

Ситуацията обаче допуска превръщане на качествената задача в количествена за един идеализиран модел на бутилка, чиято стесняваща се част представлява хоризонтален диск с кръгъл отвор в средата. За по-нататъшно опростяване може да се приеме, че обемите на маслото и на обезмасленото мляко са равни съответно на обема на гърлото и на обема на широката част на бутилката (както е показано на фигурите). При това положение, независимо от стойностите на останалите параметри (плътностите ρ и ρ' на обезмасленото мляко и на маслото, височините H и h съответно на широката част от бутилката и на гърлото ѝ, площите S и s на дъното и на напречното сечение на гърлото на бутилката) пресмятанятия би трябвало да покажат, че разликата $F - F'$ е една и съща, независимо от това, дали двете течности са смесени, или разделени.

За общия случай на съд с произволна форма може би единствено доказателство за постоянството на разликата $F - F'$ остава експерименталният факт, че равновесието на везните не се нарушава. (Между другото, в този общ случай е необходимо допълнително да се уточнява какво наричаме F , и какво – F' .) Или съществува и общо (теоретично) доказателство?