# Парадоксът на удължената релса

Известна е една класическа и по същество – *геометрична* задача, резултатът от която е парадоксален със своята величина:

*Представете си, че Земята е идеално кълбо, опасано с лента по Екватора. Ако дължината на лентата се увеличи с 1 метър и тя запази формата на окръжност, кое от изброените същества би могло да пропълзи през образуваната междина между нея и земната повърхност: микроб, муха, мишка, котка?*

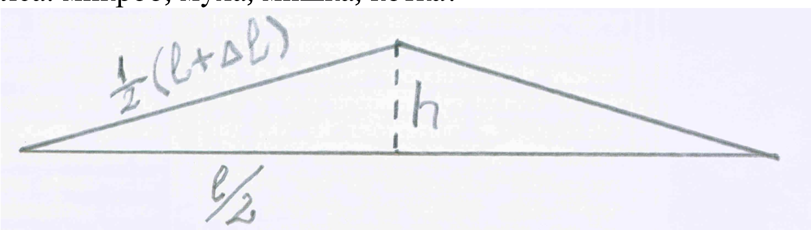
Интуицията подсказва, че заради огромната дължина на Екватора спрямо удължението (40 000 000 : 1), през междината би могъл да пропълзи микроб, но не и нещо с по-големи размери. И тъкмо тук интуицията подвежда, защото простата сметка показва, че големината на междината **не зависи** от радиуса $R$ на Земята. Наистина:

$$2\pi(R+\Delta R)-2\pi R=1, \quad \text{т.е.} \quad \Delta R=\frac{1}{2\pi}\approx 0{,}16 \text{ m},$$

т.е. – почти 16 см. Очевидно не само котка, но и нещо доста по-едро би могло да пропълзи през междина с подобен отвор – оттук и парадоксалният ефект от решаването на задачата.

До подобен ефект (макар и по съвсем друга причина) може да доведе решаването на следната, вече *физична* задача:

**Задача.** Дължината на права железопътна релса при температура $t_0$ = 20 ºC е $l$ = 24 m. През лятото слънцето може да нагрее релсата до $t$ = 70 ºC. Коефициентът на линейно температурно разширение на стоманата е $\alpha = 12.10^{-6}\ \text{K}^{-1}$. Ако положението на двата края на релсата е фиксирано, вследствие разширението тя се измята и приема по-сложна форма. Да допуснем (с не малка доза опростяване), че формата ѝ е като на фиг. 1 – равнобедрен триъгълник. Кое от изброените същества би могло да се провре под удължената релса: микроб, муха, мишка, котка?




Фиг. 1.

**Решение.** Съгласно с формулата за температурно разширение на твърди тела, удължението на релсата при нагряване с $\Delta t = t - t_0$ е:

$$\Delta l = \alpha l \Delta t .$$

Численото пресмятане на удължението при зададените в условието стойности дава резултат $\Delta\, l$ = 1,44 cm – величина, изглеждаща пренебрежимо малка спрямо дължината на релсата. В задачата обаче се търси нещо друго – ако релсата придобие форма на равнобедрен триъгълник, колко би била височината на този триъгълник. Оттук нататък и тази задача става геометрична. От теоремата на Питагор за общия катет на двата образувани правоъгълни триъгълника (т.е. за търсената височина $h$) получаваме:

$$h=\sqrt{\left(\frac{l+\Delta l}{2}\right)^2-\left(\frac{l}{2}\right)^2} .$$

Оттук нататък пресмятането по тази формула би могло да бъде поучително само в случай, че се използват правилата за опростяване чрез пренебрегване на малки величини. Например:

$$h=\sqrt{\left(\frac{l+\Delta l}{2}\right)^2-\left(\frac{l}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{l\Delta l}{2}+\left(\frac{\Delta l}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{l\Delta l}{2}}\sqrt{1+\frac{\Delta l}{2l}} .$$

Тъй като $\frac{\Delta l}{2l} \sim 10^{-4}$, няма да излезем извън границите на допустимите грешки, ако приемем, че вторият квадратен радикал е единица, така че:

$$h \approx \sqrt{\frac{l\Delta l}{2}} \approx 0{,}42\ \text{m}.$$

През междина, по-голяма от 40 cm не котка – човек би могъл да пропълзи под изметнатата релса! (Подобен резултат може да се получи по лесно с помощта на калкулатор и използване на тригонометрични зависимости.)

Задачата може да се направи още по-интересна, ако се използва законът за еластична деформация $\frac{\Delta l}{l} = \alpha \frac{F}{S}$. Тогава, като зададем допълнително коефициента на линейна деформация на стоманата (примерно $\alpha = 5.10^{-8}$ $m^2/N$) и една разумна стойност за площта на напречното сечение на релсата (около $S \sim 0{,}01$ $m^2$), може да се пресметне порядъка на силите, които трябва да приложим в краищата на релсата, за да ги удържим фиксирани (или алтернативно – силите, с които релсата действа на околните тела при разширяването си).