Продължение на парадокса на Зенон

Един от известните парадокси (или *апории*[1]) на Зенон "доказва", че бързоногият Ахил никога не може да настигне костенурка, която започва да бяга пред него с определен аванс. Наистина, след старта на състезанието Ахил ще трябва първо да пробяга половината от началното разстояние до костенурката. За времето, за което го пробягва обаче, костенурката се придвижва напред и на Ахил ще се наложи преди всичко да пробяга половината от новото, по-малко от преди, но все пак крайно разстояние. Докато пробяга и тази половина, костенурката отново ще се е придвижила и т.н. Ахил трябва да пробяга **безкраен** брой намаляващи по дължина отрязъци от разстояния, които го делят от костенурката, а за това ще му бъде необходимо **безкрайно** дълго време, т.е. той никога няма да я настигне. (Разбира се, с подобни разсъждения може да се "докаже", че дори и в случая на неподвижна костенурка, Ахил отново никога не би могъл да стигне до нея.)

Известно е обяснението на този парадокс: интервалите време, необходими за преодоляване на съответните половинки от разстоянията между Ахил и костенурката, макар и безкрайно много на брой, намаляват достатъчно бързо, така че сумата на образувания от тях безкраен ред е **крайна**. Ето защо, въпреки всичко, в определен момент Ахил настига костенурката.

Нека сега усложним случая: в началото на "състезанието" от носа на Ахил със скорост, два пъти по-голяма от неговата, към костенурката полита муха. Щом я достигне, мухата полита със същата скорост обратно, пресреща Ахил и т.н. В този случай може да поставим следната задача:

Задача. Ахил настига костенурката след изтичане на интервал време T от началото на състезанието. Ако от този момент нататък всеки от тримата участници продължи да се движи със същите скорости и по описания по-горе начин, къде ще се намира всеки от тях в момента $2T$?

Решение. Преди всичко е ясно, че в момента, когато Ахил се изравни с костенурката, в същата точка ще се намира и мухата. А оттук като че ли следва, че движението им по-нататък **не може** да продължи при спазване на основното изискване: във всеки момент мухата да се намира **между** Ахил и костенурката (или върху един от тях, като в този момент сменя посоката на скоростта си). Наистина, ако тръгне в посоката, в която се движат Ахил и костенурката, летейки със скорост, два пъти по-голяма от скоростта на Ахил, мухата би изпреварила и него, и костенурката. Ако ли пък полети в обратна посока, тя ще се окаже зад двамата "състезатели". И в двата случая условието мухата да бъде между тях се нарушава. А трети случай не е възможен, т.е. като че ли наистина движението по старите правила е невъзможно.

За да разберем защо направеното разсъждение не е вярно, първо ще обърнем внимание на характера на движението на всеки от тримата участници. За Ахил и костенурката проблеми няма: и скоростите им, и положенията им в пространството са **непрекъснати** функции на времето. Непрекъсната функция на времето е и положението на мухата. Не такъв е характерът на зависимостта от времето на скоростта на мухата. Нейната големина е константа, но в моментите, когато среща Ахил или костенурката, тя сменя посоката си! Тези моменти са *особени точки* на функцията, която описва ско-

[1] В литературата двете понятия често неправилно се смесват. Апорията представлява мислена ситуация, която е логически вярна, но в действителност – неосъществима. За разлика от нея парадоксът представлява ситуация (твърдение, разсъждение, извод), която на практика може да съществува, но няма строго логично обяснение. Парадокси възникват при наличие на противоречие между два опитни факта или между опитен факт и теоретично разсъждение. От тази гледна точка по-правилно е да се говори за апории на Зенон.

ростта на мухата в зависимост от времето. (Лесно се съобразява, че в тези точки ускорението на мухата е безкрайно голямо – в противен случай тя не би могла да промени **мигновено** посоката на скоростта си на противоположната. По-конкретно, може да се каже, че поведението на ускорението около тези моменти се описва с δ-функцията на Дирак.)

И същественото в случая е, че колкото повече Ахил доближава костенурката, толкова по-често се срещат особените точки в движението на мухата. Очевидно е, че в околността на момента T те стават безкрайно много, т.е. колкото и малко число $\varepsilon > 0$ да изберем, в интервала $T - \varepsilon$ има неограничен брой особени точки.

Въпреки този сложен от математична гледна точка характер на движението на мухата несъмнен факт е, че в момента T тримата се намират в една и съща точка. Да си представим сега, че в същия този момент времето започне да тече назад. Скоростите на участниците ще променят посоките си (защото $v = \dfrac{\Delta s}{\Delta t}$ и следователно $\dfrac{\Delta s}{\Delta(-t)} = -v$), като всеки от тях измине своята траектория в обратна посока. Реалността на подобно движение не буди съмнение – щом, движейки се по правилата, участниците са се оказали в една и съща точка, то, връщайки времето обратно, те ще се движат отново, без да нарушават тези правила.

В този пункт трябва да си спомним, че се бяхме изправили пред проблема дали движението на Ахил, костенурката и мухата може да продължи **напред** по същите правила, по които са се движили до момента T. Но началните условия в двата случая са едни и същи: тримата участници в даден момент (момента T) се намират в една и съща точка. Щом те могат да се върнат назад, спазвайки правилата, те ще могат да продължат движението си и напред, без да нарушават тези правила. Това означава, че мухата, за да остава винаги между Ахил и костенурката, ще трябва да направи отново безкраен брой обръщания на посоката на скоростта си, като с течение на времето (назад!) те стават все по-рядко и по-рядко.

Накрая да се върнем към въпроса в условието на задачата. С Ахил и с костенурката проблеми няма: в момента $2T$ Ахил ще е два пъти по-далеч от стартовата си точка в сравнение с разстоянието, което е изминал за време T. За костенурката е валидно същото твърдение: и тя ще се намира в точка, отстояща от нейния старт на два пъти по-голямо разстояние от това, което е изминала до момента T.

За положението на мухата в момента $2T$ обаче не можем да кажем нищо. Пътят, който е изминала тя, отново ще бъде два пъти по-дълъг от пътя, изминат от Ахил, но къде е крайната му точка не може да се каже. Тази неопределеност идва от особения характер на скоростта на мухата в момента T – ние не знаем накъде е тръгнала тя веднага след този момент.

Бележка. Читателят едва ли си представя колко много дебати съществуват около решението на тази задача (и на други подобни, които са нейни варианти). Тук се постарах да изложа едно решение, което **за мен** изглежда най-задоволително. Читател, който би се заинтересувал от различните подходи към проблема, може да се обърне към книгата на Мартин Гарднер *Крестики–нолики* (М., "Мир", 1988). В нея авторът посвещава на проблема цяла глава – глава 13. Там например е приведен и друг очевиден пример за движение, което при естествен ход на времето е напълно определено и става напълно неопределено, в случай че течението на времето се обърне.

Представете си кораб, който от точка на Екватора се насочва към Северния полюс, движейки се по *локсодрома* (т.е. траекторията му пресича всички меридиани под един и същ ъгъл). Тази крива е специален вид спирала, която доближава полюса, правейки безкраен брой обиколки с намаляващ радиус около него. Тъй като големината на скоростта на кораба е крайна, а и дължината на локсодромата е крайна (стойността ѝ зависи от ъгъла, под който се пресичат меридианите), след краен интервал време корабът ще се окаже на самия полюс. Ако обаче движението се обърне във времето, оказва се, че в края му корабът може да попадне в коя да е точка на Екватора, т.е. – не непременно в тази, от която е тръгнал. Причината е във факта, че в началното движение няма *последна витка* на спиралата, по която да започне връщането – броят на витките е безкрайно голям. Според остроумната забележка на математик, участвал в дискусията около решенията на подобни задачи, в случая на обратното движение задачата се свежда до намиране на сумата на безкраен ред, но като се започне от **последния** му член (какъвто фактически няма!), т.е. – отзад напред.