Охлюв гони вързан кон – и го настига![1]

Съществуват два варианта на една класическа задача, която поразява с мащабите на крайния резултат. Нейният по-разпространен вариант изисква решаване на обикновено линейно диференциално уравнение от първи ред. Другият, предложен по-долу дискретизиран вариант[2], може да се разглежда и с ученици, проявяващи по-голям интерес към физиката.

Задача. Кон е привързан за стена посредством еластична лента с дължина L. Свойствата на лентата са необичайни: нейният коефициент на еластичност е нула, така че конят може да я разтяга без усилие неограничено. В един момент от стената по лентата започва да пълзи охлюв с постоянна спрямо лентата скорост v. В края на първата секунда конят подскача и удвоява дължината на лентата, докато охлювът продължава да пълзи. В края на втората секунда конят отново подскача и увеличава дължината на лентата с още L, а пълзенето на охлюва продължава без промяна. Покажете, че ако този процес продължи достатъчно дълго, охлювът ще възседне коня!

Бележка: Ако с $\Delta t = 1$ s означим всеки от интервалите време, през които конят е неподвижен, очевидно задачата има смисъл само при условие, че е изпълнено неравенството $v\Delta t < L$. В обратния случай ще се окаже, че още през първата секунда охлювът достига коня.

Решение. Според условието на задачата, в интервала от време между началото и края на n-тата секунда разстоянието между коня и стената е постоянно и равно на nL, а охлювът за това време пропълзява разстояние $v\Delta t$. Така през първата секунда охлювът изминава част от дължината на лентата, изразяваща се с дробта $\frac{v\Delta t}{L}$. През втората секунда дължината на лентата вече е $2L$, така че, движейки се със същата скорост, през втората секунда охлювът преодолява $\frac{v\Delta t}{2L}$-та част от новата дължина на лентата. По същия начин през третата секунда преодоляната част от общата дължина на лентата ще бъде $\frac{v\Delta t}{3L}$ и т.н.

Разсъждавайки по този начин, стигаме до извода, че в края на n-тата секунда охлювът е пропълзял $\frac{v\Delta t}{nL}$-та част от дължината на лентата. Ето защо, ако означим с μ_n общата пропълзяна за n секунди част от разстоянието между охлюва и коня, то:

$$\mu_n = \frac{v\Delta t}{L} + \frac{v\Delta t}{2L} + \frac{v\Delta t}{3L} + \ldots + \frac{v\Delta t}{nL} = \frac{v\Delta t}{L}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}\right). \tag{1}$$

Охлювът ще настигне коня, ако при някаква стойност на n се достигне равенство $\mu_n = 1$. В скобите на дясната страна на (1) фигурира изразът:

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}. \tag{2}$$

В математиката този израз се нарича *частична сума* на един безкраен ред, известен с името *хармоничен* ред. Известно е също така, че хармоничният ред е *разходящ*, т.е. с увеличаване на броя на събираемите в S_n, сумата им може да стане по-голяма от всяко предварително избрано число. В нашия случай това означава, че рано или късно

---

[1] Вариант, адаптиран към равнището на обучение в училище.

[2] Според Мартин Гарднер (вж. книгата му *Путешествие во времени*, М., „Мир”, 1990) този вариант е предложен от Д. Уилкин от Нова Каледония и е публикуван през 1972 г. във френското списание *Science et Vie*.

стойността на S_n ще надмине числото $\frac{L}{v\Delta t}$ и следователно целият израз в лявата страна на (1) ще стане по-голям от единица. Разбира се, учениците не знаят нито какво е безкраен ред, нито че има сходящи и разходящи редове и че хармоничният ред е разходящ. Съществуват обаче достъпни за тях методи за доказателство на твърдението, че стойността на S_n може да стане произволно голяма. Един от тях, който дължим на средновековния френски учен Никола Орем[3], е следният.

Да означим с S стойността на израза (2) при $n = \infty$ и да направим следното групиране на неговите членове:

$$\begin{aligned} S &= 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots \\ &= 1+\frac{1}{2}+\left[\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right]+\left[\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right]+\left[\frac{1}{9}+\ldots\frac{1}{16}\right]+\ldots \end{aligned}.$$

Ако след това направим знаменателите на събираемите във всяка скоба равни на последния, най-големия знаменател в скобата, това със сигурност ще намали стойността на израза в скобата. Ето защо можем да запишем неравенството:

$$\begin{aligned} S = 1+\frac{1}{2}+\left[\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right]+\left[\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right]+\left[\frac{1}{9}+\ldots\frac{1}{16}\right]+\ldots > \\ 1+\frac{1}{2}+\left[\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right]+\left[\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right]+\left[\frac{1}{16}+\ldots\frac{1}{16}\right]+\ldots \end{aligned}.$$

Ясно е, че сумата от дробите във всяка скоба е $\frac{1}{2}$, така че получаваме:

$$S > 1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}+\cdots \; .$$

Очевидно е, че дясната страна на това неравенство е безкрайно голяма, което означава, че ако в равенство (2) дадем достатъчно голяма стойност на n, S_n със сигурност ще стане по-голямо от $\frac{L}{v\Delta t}$, което означава, че след n секунди $\mu_n \geq 1$, т.е. охлювът ще настигне коня – което трябваше да се докаже.

Може да се очаква, че изложеното решение ще впечатли със своята достъпност и елегантност всеки ученик, който проявява интерес към физиката и цени строгите разсъждения.

Пример. За да стигнем до споменатия в началото поразяващ с мащабите си резултат, трябва да напуснем границите на елементарната математика и да разгледаме конкретен пример с реалистично подбрани стойности на параметрите, които участват в условието на задачата. Нека началната дължина на лентата е $L = 1$ m, а скоростта на охлюва – $v = 1$ mm/s. В този случай отношението, от което зависи кога охлювът ще настигне коня, е твърде голямо:

$$\frac{L}{v\Delta t} = \frac{1\,\text{m}}{1\,\text{mm}} = 1000.$$

Оттук и от формула (1) следва, че броят n на секундите, след изтичане на които се достига равенството $\mu_n = 1$, се определя от уравнението:

$$S_n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n} = 1000. \qquad (3)$$

Фактът, че в дясната страна на (3) стои число, голямо спрямо 1, дава възможност за частичната сума на хармоничния ред да се използва известната формула на Ойлер:

[3] Орем (Nicolas Oresme) е френски учен, който дава тук изложеното доказателство около 1350 г., т.е. повече от четиридесет години преди турците да превземат Търново!

(4) $$S_n \approx \ln n + \gamma,$$
където $\gamma = 0{,}5772...$ е т.нар. *константа на Ойлер*. При това положение броят n на секундите, след изтичане на които охлювът настига коня, се определя от равенството:
(5) $$\ln n + \gamma = 1000.$$
В случай, че търсим оценка само на порядъците, можем да пренебрегнем γ спрямо 1000 и тогава, след антилогаритмуване на (5) получаваме, че времето, за което охлювът настига коня, е от порядъка на e^{1000}секунди. Ако изразим това число като 10 на определена степен, същият интервал време се оказва по-голям от 10^{400}. Много ли е това или малко, личи от сравнението на последното число с възрастта на Вселената, която няма и 10^{18} секунди. Дори ако охлювът е „по-бърз” и пълзи със скорост 1 cm/s, за да настигне коня, ще са му необходими повече от 10^{43} секунди – отново много повече от възрастта на Вселената. Тъй като *средната* скорост на коня е 1 m/s (той се движи на подскоци!), дължината на лентата към момента на настигането ще бъде над 10^{43} m! А това означава, че лентата трябва да излезе далеч извън пределите на днешната Вселена, чиито размери не надминават 10^{24} m.

И по-нататък...

1. В началото на движението скоростта на охлюва спрямо земята е очевидно по-малка от средната скорост на коня. Щом обаче охлювът все пак настига коня, трябва да съществува момент, в който двете средни скорости се изравняват и след който момент вече охлювът се движи (спрямо земята!) по-бързо от коня. Любителите на пресмятания може да потърсят в кой момент и на какво разстояние от стената абсолютните скорости на коня и на охлюва се изравняват.

2. Помислете дали отговор на въпроса, ще настигне или няма да настигне охлювът коня, може да се търси на чисто качествено равнище, без да се прибягва до споменаване на безкрайни редове, сходимости и пр.

Допълнение. По-долу е изложен един възможен начин за разсъждение по втория от поставените два въпроса.

За решаване на задачата ще използваме едно спомагателно твърдение. Представете си опъната еластична лента. Произволна, но фиксирана точка от лентата я разделя мислено на две части, отношението между дължините на които ще означим с α. Представете си след това, че разтегнем лентата допълнително. Интуитивно ясно е, че двете нейни части ще се удължат пропорционално, така че отношението между дължините им ще остане също α. С други думи, **отношението на дължините от фиксираната точка до двата края на лентата не зависи от това, колко разтегната е цялата лента**[4].

Да се върнем сега към нашата задача. Нека в началото на n-тата секунда отношението между разстоянията от охлюва до коня и от охлюва до стената α_n. В течение на тази секунда конят е неподвижен, охлювът напредва, така че в края на секундата, миг преди поредния скок на коня (т.е. – преди началото на (n+1)-та секунда) е изпълнено неравенството $\alpha_{n+1} < \alpha_n$. В този момент конят подскача напред, разтяга допълнително лентата, но по силата на спомагателното твърдение отношението α_{n+1} не се променя.

Разсъждавайки по този начин стигаме до заключението, че с течение на времето отношението между разстоянието от охлюва до коня и от охлюва до стената непрекъснато намалява. И тъй като общата дължина на лентата е крайна, непременно ще настъпи момент, в който разстоянието от охлюва до коня ще стане по-малко от

[4] Ако това твърдение не ви изглежда интуитивно ясно, опитайте да го докажете.

разстоянието, което охлювът изминава за 1 секунда. А понеже в течение на тази секунда конят е неподвижен, в нейния край охлювът вече ще е възседнал коня.

Което и трябваше да се докаже[5], както казват математиците.

[5] Авторът не е сигурен, че това е най-простото измежду възможните доказателства. Нещо повече – не е сигурен и дали то въобще представлява доказателство.