Ахил, костенурката, $s = vt$
и сумата на безкрайна намаляваща геометрична прогресия

Един ефективен начин за възбуждане, поддържане и засилване на интереса към изучаването на физика е обсъждането на парадокси. Фактът, че след подобно обсъждане обикновено остава някакво съмнение за нещо недоизказано, за нещо недоизяснено, стимулира мисълта на ученика да продължи да мисли върху проблема, а това вече спомага за развитие на лоичното му мислене.

Да разгледаме например един от популярните парадокси (апории) на древногръцкия философ Зенон Елейски за Ахил и костенурката, върху който векове наред са разсъждавали математици, физици и философи. С този парадокс Зенон „доказва", че ако костенурката има определен аванс, бързоногият Ахил никога не би я настигнал, въпреки че бяга много по-бързо от нея. Наистина, докато Ахил стигне до мястото, от което е тръгнала костенурката, тя ще измине някакво, макар и по-малко разстояние. Докато Ахил измине това малко разстояние, костенурката отново ще се отдалечи от него, макар и на още по-малко разстояние. И така – до безкрайност, между двамата бегачи винаги ще остава някакво, макар и все по-намаляващо разстояние.

Нека придадем количествен израз на разсъжденията на философа. Да означим с V, v и s съответно скоростите на Ахил, на костенурката и началното разстояние между тях. Ахил изминава началното разстояние за време $t_1 = \frac{s}{V}$, за което костенурката се отдалечава на разстояние $s_1 = v\frac{s}{V}$ от него. За да пробяга това разстояние s_1, на Ахил е необходимо време $t_2 = \frac{s_1}{V} = v\frac{s}{V^2} = \frac{v}{V}t_1$, за което костенурката пък ще се отдалечи на разстояние $s_2 = v^2\frac{s}{V^2}$. По същия начин ще получим, че за преодоляване на третия етап от „състезанието" е необходимо време $t_3 = \frac{v}{V}t_2 = \left(\frac{v}{V}\right)^2 t_1$ и т.н.

Времето, за което Ахил ще настигне костенурката е:

(1) $$t = t_1 + t_2 + t_3 + \cdots = t_1\left(1 + \frac{v}{V} + \left(\frac{v}{V}\right)^2 + \left(\frac{v}{V}\right)^3 +,,,\right).$$

Тъй като $\frac{v}{V} < 1$, с помощта на формулата за сума на безкрайна намаляваща геометрична прогресия (която не е била известна на Зенон), получаваме:

(2) $$t = t_1.\frac{1}{1-\frac{v}{V}} = \frac{s}{V}.\frac{1}{1-\frac{v}{V}} = \frac{s}{V-v}.$$

Формулата за сума на безкрайна геометрична прогресия обаче се изучава едва в 11. клас и то само от ученици, изучаващи математика по програмата за профилирана подготовка. С ученици обаче, които не познават тази формула, но проявяват интерес към физиката и математиката, случаят може да се разгледа по друг начин и да се постигне друга цел. На тях първо може да се постави следната задача.

Намирайки се на разстояние s от една костенурка, Ахил се затичва към нея, за да я хване. Костенурката обаче го забелязва и „побягва". След колко време Ахил ще я настигне, ако той бяга със скорост V, а нейната скорост е v?

Всеки осмокласник, който умее да разсъждава, би решил задачата, като съобрази, че ако в момента на настигане костенурката е изминала разстояние x, Ахил е пробягал разстояние $s + x$. И тъй като $x = vt$, а $s + x = Vt$, то $\frac{x}{v} = \frac{s+x}{V}$ и следователно:

$$x = \frac{vs}{V-v},$$

откъдето, предвид $x = vt$, получаваме:

(3) $$t = \frac{s}{V-v}.$$

С други думи проблема на Зенон можем да решим с елементарни средства – по същество за получаване на (3) бе достатъчна само формулата $s = vt$. При това положение можем да използваме (3) и да приравним десните страни на (3) и (2). Като означим отношението $\frac{v}{V} \equiv \eta$, резултатът е:

$$(4) \qquad 1 + \eta + \eta^2 + \eta^3 + \cdots = \frac{1}{1-\eta},$$

т.е. – точно формулата за сума на безкрайна намаляваща геометрична прогресия.

И така, оказва се, че тази формула може да се изведе с елементарни кинематични разсъждения. Разбира се, по този път не може да се стигне до условията, при които е приложима тази формула. А, за да се убедим в необходимостта от такива условия е достатъчно да се опитаме за я приложим към геометричната прогресия с членове:

$$1, 2, 4, 8, 16 \ldots$$

– абсурдният резултат (–1) показва, че такива условия наистина трябва да съществуват. С тях обаче учениците могат да се запозвaят едва в профилираното обучение по математика в 11. клас.

В направените разглеждания има още един съмнителен пункт: в преобразуването на израза в (1) извадихме t_1 пред скоба – една операция, която в случая на сума от краен брой членове е напълно законна. Когато събираме безкраен брой числа обаче това не винаги е позволено, защото също може да доведе до абсурд. Като пример за това може да послужи вече използвана прогресия. Да означим с x нейната сума:

$$x = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \ldots$$

Ако изваждането на общ множител пред скоби е винаги възможно, бихме могли да получим просто уравнение за x. Наистина, в такъв случай:

$$x = 1 + 2(1+ 2 + 4 + 8 +\ldots) = 1 + 2x,$$

от където отново следва невъзможният резултат $x = -1$.

Тези допълнителни разглеждания трябва да разкрият необходимостта от построг извод на формула (4), какъвто може да се направи в 11. клас.

Очевидно е, че тези разглеждания не са предназначени за работа клас. Нерядко обаче се срещат ученици с по-големи способности за изучаване на физика и математика, чиито интереси не може да бъдат задоволени от материала, включен в общообразователната подготовка. За да не бъдат изгубени като бъдещи инженери или физица, с такива ученици следва да се работи индивидуално и тъкмо с тях може да се обсъждат проблеми като тук предложения, защото те са достатъчно любопитни и провокативни, чрез което да поддържат и развиват интереса към физиката и математиката, както и да развиват логическото мислене.