Защо $a = \dfrac{\Delta v}{\Delta t}$?

или: Как би изглеждала кинематиката, ако вместо свободното падане Галилей бе изследвал дрейфа на електроните в един проводник[1]

Може ли да се пита защо ускорението на материална точка се определя с равенството $a = \dfrac{\Delta v}{\Delta t}$? Правомерен ли е подобен въпрос? Нали това е дефиниция – може ли да се пита защо една дефиниция е такава, а не друга? Какво още бихме могли да наречем ускорение, ако не промяната на скоростта за единица време?

Нека погледнем нещата малко по-общо

Притиснати от липсата на време в училище, обикновено не се спираме на подобни въпроси. На нас обикновено ни убягват проблемите, свързани със структурата на научното познание, а именно това е една от основните разлики между него и другите видове познания (например религиозното познание, което се гради върху догми.) И когато става дума за физичните знания, ние пропускаме да изясним пред учениците, че от гледна точка на логиката на науката формулите, с които ги занимаваме, са няколко съвсем различни категории. Едни формули например представляват дефиниции, определения за физични величини. Така формулата:

(1) $$v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

дефинира големината на величината скорост. Ако така определената величина е постоянна, от (1) веднага **следва** формулата за пътя при равномерното движение:

(2) $$s = vt \, .$$

Това означава, че формула (2) нито е резултат от опитни изследвания, нито трябва да се проверява опитно. Тя може да ни служи да проверяваме дали едно конкретно движение е или не е равномерно.

Някои формули са израз на опитно установени зависимости, на природни закони. Типичен пример е формулата, която изразява закона на Кулон, който е резултат от опитно установената зависимост $F \sim r^{-2}$. Нейната опитна проверка, която продължава непрекъснато вече повече от два века, има двояка роля. Първо, опитите водят до постоянно намаляване на грешката, с която сме установили, че степенният показател на разстоянието е наистина точно -2, а не например -1,99999….98. Второ – само опитът може да покаже границите на приложимост на тази зависимост в областите на извънредно малките и извънредно големите разстояния.

Опитно установен е и законът на Хук $F = kx$. При него ролята на опита е също да установи границите на приложимост за всеки конкретен материал и точността, с която се изпълнява в тези граници.

И в двата случая съществува надеждата, че един ден този тип закони може да се окажат следствия, да се изведат теоретично в една бъдеща, по-обща теория – за закона на Хук от теорията на твърдото тяло на микроскопично равнище, а за Кулон – от обединената теория на фундаменталните взаимодействия. По този път вече е минал опитно установеният закон на Ом, който се извежда теоретично в теорията на Лоренц за електромагнитните взаимодействия в непрекъснати среди.

Трети тип са формулите, които се извеждат с помощта на вече приети дефиниции и установени закономерности. Типичен пример за такава формула е формулата за периода на математично махало $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$.

[1] Физика, **3**, 2005, с. 165–169.

Тук споменаваме една твърде опростена класификация на изучаваните в училище формули (в нея например трудно биха се вместили формули от типа $E = h\nu$ или $E = mc^2$), защото целта е не да правим класификация, а чрез разгледаните примери да посочим проблема.

Разбира се, от своята прагматична гледна точка обикновено ученикът използва съвсем друга класификация на формулите – за него те са сложни или прости (в зависимост от това, колко величини свързват, има ли в тях степени или квадратни корени, тригонометрични функции и т. н..) И ако след като е изучавал физика, той не вижда принципната разлика между формулата $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ и формулата за механична работа ($A = Fs$), това вече свидетелства за сериозен пропуск в представите му по отношение структурата на научното познание.

От тази гледна точка е съществено в процеса на обучение да се търси известна обосновка на определенията за изучаваните величини. Въпросът "Защо?" наистина е правомерен и отговорът му обикновено е свързан с някакви практически съображения. От историята на физиката е известно, че определенията за такива величини като работа, енергия, импулс и др. п. не се появяват изведнъж, че те са резултат на дълго (понякога повече от един век) избистряне. Разбира се, в училище нито има необходимост, нито възможност да се проследява тяхната еволюция, но все пак идея за обосновката може и трябва да се дава, за да се изградят правилни представи за споменатата структура на научните знания.

За пример да разгледаме определението за величината механична работа, тъй като в това отношение този пример е наистина е показателен.. Защо при постоянна сила, еднопосочна с преместването, работа наричаме произведението Fs? Защо не Fs^2, или $F\sqrt{s}$, или $\sqrt{F}s^2$ – възможностите са безкрайно много? Защо тъкмо Fs?

Вероятно защото хората са забелязали, че в практиката тъкмо това произведение Fs е от значение. Представете си от какво зависи *работата* (в житейски смисъл!) на работник на строеж, който с помощта на макара издига тухли, преодолявайки теглото им. Да предположим например, че като товари на платформата по 10 тухли, за ден той може да издигне до пода на третия етаж (примерно височина h) 1000 тухли. Като действа със същата сила, за същото време той би могъл да издигне на два пъти по-голяма височина (до пода на петия етаж) само 500 тухли. Ако ли пък товари на платформата по 20 тухли (т. е. действа с два пъти по-голяма сила), за ден ще издигне 1000 тухли само до пода на втория етаж (височина $h/2$). Във всички подобни случаи обаче той получава една и съща заплата, неговата *работа* (в житейски смисъл!) е **една и съща**. Това вече навежда на мисълта, че е целесъобразно (удобно) физическата величина ***механична*** *работа* да се определи чрез произведението на силата и преместването, защото в разгледаните примери точно това произведение Fs, а не Fs^2 или нещо друго е **едно и също**. За физиката пък точно това определение е целесъобразно, защото само при него работата, извършена от външните сили над една система, е равна на нарастването на енергията на системата.

Да се върнем сега на въпроса от заглавието. Първо: има ли алтернатива на дефиницията $a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$? За величината скорост като че ли алтернатива няма – понеже със скоростта характеризираме бързината, с която се променя положението на една материална точка **във времето**, някак естествено следва определението $v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$. Когато искаме да характеризираме как се променя скоростта обаче, възможностите са поне две. Едната е да наречем ускорение промяната на скоростта за единица време (т. е. да приемем, че $a = \dfrac{\Delta v}{\Delta t}$). Със същото право обаче можем да наречем ускорение и промяната на скоростта **за единица изминат път** (за опростяване навсякъде имаме предвид едномерно движение)! Тъй като и по-нататък ще разсъждаваме върху втората възможност, нека означим така определеното "ускорение" с друг буква – напр. с b, т. е. нека наречем величината

(3) $$b = \frac{\Delta v}{\Delta s}$$

"ускорение" в кавички. (Забележете, че за определението на скоростта подобна алтернатива не съществува – безсмислено е да наричаме скорост "промяната на положението за единица път". То води до равенството $\dfrac{\Delta s}{\Delta s} = 1$.)

От казаното трябва да става ясно, че зад всяко определение за физична величина стоят определени съображения. От историята на физиката е известно, че именно Галилей пръв въвежда строго величината ускорение.

Да се върнем към времето на Галилей.

Нека се помъчим да разберем от какви съображения Галилей нарича ускорение величината a, а не величината b. Изборът на Галилей пада върху формулата $a = \dfrac{\Delta v}{\Delta t}$ по една единствена причина – само защото е изучавал дадено конкретно движение – свободното падане на телата. Този избор той не прави веднага – всъщност първоначално за характеризиране на промяната на скоростта Галилей използва "ускорението" b. Това личи ясно от разговора на тримата събеседници Салвиати, Сагредо и Симпличио (истинският пепипатетик) по време на третия ден, през който обсъждат "естествено ускорителното движение" в най-значителното съчинение на Галилей – "Беседи и математически доказателства относно две нови науки"[2]. (Първата нова наука е за съпротивлението на материалите, а втората – за движението на падащите тела.) Именно тук (с. 145) Галилей дава следното определение:

"*…равномерно – или равноускорително наричаме движението, при което излязлото от покой тяло за равни времена придобива равни увеличения на скоростта.*"

По-нататък, тълкувайки тази дефиниция, Салвиати казва (с. 149):

"*…това е все същото, ако кажем, че за равни времена се извършват и равни увеличения на скоростта. И ако се окаже, че особеностите, които впоследствие ще бъдат доказани, са свойствени на движението на естествено падащите и ускорени тежки тела, ще можем да смятаме, че приетата дефиниция обяснява въпросното движение на тежките тела…*"

Оттук е пределно ясно, че дефиницията за ускорение $a = \dfrac{\Delta s}{\Delta t}$ е приета именно защото **обяснява** особеностите на свободното падане. На същото място става дума обаче и за другата възможност. Тя е вложена в устата на Сагредо, който казва:

"…*Според представата, която имам в момента в главата си, ми се струва, че същата дефиниция би могла да бъде изразена с по-голяма яснота и без да се изменя по същество, ако кажем: равноускорително е движението, при което скоростта се увеличава с увеличение на изминатото разстояние. Така например скоростта, която тялото е придобило при падане от четири лакътя, ще е двойно по-голяма от скоростта, която то е придобило при падане от два лакътя…*"

[2] Галилео Галилей, Избрани произведения, т. 2, С., Наука и изкуство, 1984.

Фактът, че и Галилей първоначално е наричал равноускорително движението, при което скоростта расте право пропорционално на пътя (а не на времето!), личи от последващата реплика на Салвиати:

"*…За мен е голяма утеха, че имам другар като вас в заблудата си. Ще ви кажа освен това, че разсъждението ви е до такава степен вероятно и правдоподобно, щото самият Автор* (т. е. Галилей – б. а.) *не отрече,…, че и той за известно време е бил изпаднал в подобна заблуда.*"

И по-нататък Салвиати излага разсъжденията, с които се показва, че при свободното падане скоростта е пропорционална на времето, а не на пътя.

И така, още веднъж: Галилей нарича ускорение величината $a = \dfrac{\Delta s}{\Delta t}$ поради една единствената причина, че при изучаваното **от него** движение – свободното падане, тази величина е константа. Именно тази постоянна величина за него е естествената характеристика ("*обяснява*" – в терминологията на Салвиати) на това движение. Днес ние я наричаме земно ускорение.

Не бива да се мисли, че окончателният избор е бил лесен! По същество е трябвало да се направи *избор* на **независима** променлива, спрямо която да се разглеждат промените на другите величини, характеризиращи движението. Естественият избор по онова време пада върху пътя: наблюдателят вижда как скоростта на падащото тяло расте с увеличаване на изминатия път. В началото на XVII век, при липсата на що годе точни часовници, в съзнанието на хората, включително и на учените, все още не се е избистрила представата за *времето* като нещо, което тече непрекъснато и независимо от промените, извършващи се в пространството – идеята за такова едно време ще формулира в своите *Принципи* едва Нютон. Една от многобройните заслуги на Галилей е, че той все пак успява да се преориентира и през 1609–1610 г. открива правилната променлива, спрямо която свободното падане е равноускорително – времето.

А как би изглеждала кинематиката, ако

Галилей бе изследвал не свободното падане, а друго явление?

Нека пофантазираме. Да си представим, че в началото на 17. век учението за електричните явления е било на равнището в началото на 20. век, а Галилей е трябвало да създава кинематиката. Да си представим още, че за целта той избере не свободното падане, а дрейфа на електроните и изучава движението на електрон в меден проводник след прекъсване на една постояннотокова верига, т. е. се интересува от съответния преходен процес. Тогава той би установил, че скоростта на електрона намалява право пропорционално не на времето, а на изминалия път!

Наистина, да разгледаме процеса от гледна точка на днешните ни знания, но на доквантово равнище. Във въпросния случай движението на електрона става единствено под действие на съпротивителна сила от стоксов тип, т. е. $F = -kv$, където k е константа. Уравнението на движение за този електрон би било:

(4) $$ma = -kv,$$

където m е масата на електрона. Ако запишем и преобразуваме това равенство по следния начин:

(5) $$ma = m\frac{\Delta v}{\Delta t} = m\frac{\Delta v}{\Delta s}\frac{\Delta s}{\Delta t} = m\frac{\Delta v}{\Delta s}v = -kv,$$

виждаме, че при това движение именно величината:

(6) $$b = \frac{\Delta v}{\Delta s} = -\frac{k}{m},$$

която по-горе нарекохме "ускорение", остава постоянна (всъщност, заради знака минус би следвало да говорим за "закъснение").

Ако Галилей бе приел тази дефиниция, тогава равноускорително би било движението, при което скоростта е право пропорционална на изминатия път.

Ситуация, в която Галилей изучава преходни процеси в електрични вериги, може да изглежда твърде невероятна. Има обаче и други възможности. Представете си, че делфините развият интелекта си до степен, която им позволява да правят наука. Те по принцип не могат да изучават свободно падане, но може би ще започнат да градят кинематиката върху едно най-просто за тях движение: движението на тяло с плътност, равна на плътността на водата, след като с тласък му предадем определена скорост. В същата ситуация биха се оказали и разумни същества на някаква друга планета, на която животът се развива само в течна среда. Във всички тези случаи движението става под действие на сила от стоксов тип и заключенията ще бъдат като приведените погоре.

Как би изглеждала кинематиката в този случай?

И така, нека наречем "ускорение" величината

$$b = \frac{\Delta v}{\Delta s}. \tag{7}$$

Какъв вид биха приели някои от познатите кинематични зависимости?

Първо, лесно се вижда, че размерността на "ускорението" b е T^{-1}. Наистина:

$$[b] = \left[\frac{v}{s}\right] = \left[\frac{\frac{s}{t}}{s}\right] = \left[\frac{1}{t}\right] = T^{-1}.$$

От определението $b = \dfrac{\Delta v}{\Delta s}$ следва още, че законът за скоростта при "равноускорително" движение без начална скорост, т. е. при b = const би приел вид $v = bs$. Оттук пък следва, че ако отчитаме пътя от началното положение на едно неподвижно тяло ($s_0 = 0, v_0 = 0$), тялото въобще няма да може да се задвижи "равноускорително", защото и скоростта, и ускорението му са нула.

По-нататък, от определенията за a и b следва, че връзката между моментните стойности на двете величини е:

$$b = \frac{\Delta v}{\Delta s} = \frac{\Delta v}{\Delta t}\frac{\Delta t}{\Delta s} = \frac{a}{v}. \tag{8}$$

Оттук веднага получаваме, че при истинското равноускорително движение (т. е. при a = const, когато $v = at$) "ускорението" b е обратно пропорционално на времето. Наистина:

$$b = \frac{a}{v} = \frac{a}{at} = \frac{1}{t}. \tag{9}$$

Тази формула показва, че в началния момент при равноускорително движение "ускорението" b е безкрайно голямо и затова едно неподвижно тяло може да получи крайна скорост.

С помощта на получените формули можем да изведем и закона за пътя при едно "равноускорително" движение, т. е. при движение с b = const. Тъй като в този случай $v = bs$, то от определението за скорост получаваме връзката:

$$\frac{ds}{dt} = v = bs. \tag{10}$$

След нейното интегриране получаваме:

$$s = s_0 e^{bt}, \tag{11}$$

т. е. в този случай изминатият път расте с времето експоненциално. Формула (11) потвърждава посочената особеност на това “равноускорително” движение: за неподвижно тяло то не може да започне, ако няма начално отместване (т. е. ако $s_0 = 0$).

А какво можем да кажем за основния закон на динамиката на материална точка? Поради връзката (8) сега той вместо $F = ma$, би имал по-сложния вид $F = mvb$.

Сравнявайки всички тези нови зависимости със старите и добре познати кинематични закони виждаме, че Галилей наистина е направил сполучлив избор, като е нарекъл ускорение именно величината $\frac{\Delta v}{\Delta t}$, а не $\frac{\Delta v}{\Delta s}$.