За удължението и енергията на масивна пружина[1]

Проблемът. Като правило, при разглеждане на пружинно махало, явно или неявно масата на пружината се пренебрегва. В една от последните книжки на списание Физика обаче се появи интересна разработка за лабораторно упражнение [1], в която масата на пружината не се пренебрегва – разглеждат се трептения на масивна пружина. Нещо повече, показано е как от опитните резултати за трептенията може да се пресметне масата на самата пружина. В разработката се използва известен резултат (вж. напр. [2], с. 153), според който ако масата на махалото е M, а масата на пружината – m, трептенията се извършват като при безмасова пружина, но на махало с ефективна маса $M + m/3$ (т.нар. *приведена масса*). Така например формулата за периода на махало с масивна пружина има вида $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{M + m/3}{k}}$. При това авторите на [1] получават този резултат чрез удачна замяна на използваното в [2] интегриране със сумиране на безкраен ред (последното може да се види не в журналния вариант [1], а в пълната версия на разработката на адрес http://dw.georgievi.net/pend).

В училище обаче пружините (и въобще еластичните нишки) се използват не само за илюстриране на такива динамични явления, каквито са хармоничните трептения, но и в статични случаи в рамките на приложимост на закона на Хук (например за измерване на сили с пружинни везни, с динамометри и т.н.). Една пружина, чиято маса m не се пренебрегва, когато е окачена вертикално, провисва, т.е. дължината ѝ се увеличава под действие на собствената ѝ тежест. Имайки предвид резултата от [2], може да се предположи, че провисването ще бъде като при безмасова пружина, в долния край на която е окачено тяло с маса $m/3$. За проверка на това предположение ще направим пресмятания, в които за избягване на въпроси, които могат излишно да усложнят проблема, разглеждаме не пружина, а нишка.

Пресмятане на провисването. Да разгледаме най-простата задача, в която масата на една еластична нишка **не** се пренебрегва:

С колко ще се удължи под влияние на собствената си тежест окачена в единия си край еластична нишка с маса *m*, площ на напречното сечение *S* и дължина *L*, ако модулът на Юнг на материала на нишката е *E*?

Задачата ще решим на няколко стъпки по метод, подобен на използвания в [1].

Нека първо си представим, че нишката е безтегловна, а цялата ѝ маса е съсредоточена в долния ѝ край (фиг. 1). В този случай означаваме удължението ѝ с ΔL_1 и го определяме от закона на Хук:

(1) $$mg = ES\frac{\Delta L_1}{L}, \text{ т е. } \Delta L_1 = \frac{mg}{ES}L,$$

където g е земното ускорение.

Второ – да си представим, че безтегловната нишка е прекъсната в средата и там е окачено тяло с маса $m/2$, а в долния ѝ край е окачено друго тяло, също маса $m/2$ (като цяло нишката отново е натоварена с маса m). Нека освен това си представим, че горният край и средата на нишката, както средата и долният ѝ край, са свързани с неразтегливи безмасови конци, всеки с дължина $L/2$. Конците не позволяват на нишката да се разтяга, така че когато окачим горния ѝ край, получаваме ситуацията от фиг. 2, а. Ако прекъснем конеца, означен с “1”, долната половина на нишката ще се разтегне под

[1] Физика, 2, 2007, с. 77–83.

влияние на силата на тежестта $mg/2$ (фиг. 2, б) и нейното удължение $\Delta L'$, както във формула (1), ще бъде:

(2) $$\frac{m}{2}g = ES\frac{\Delta L'}{L/2}, \text{ т. е. } \Delta L' = \frac{mg}{2ES}.\frac{L}{2}.$$

Ако сега прекъснем и конеца “2”, под действие на общата сила mg горната половина на нишката ще се удължи с $\Delta L''$ (фиг. 2, в):

(3) $$mg = \frac{ES}{L/2}\Delta L'', \text{ т. е. } \Delta L'' = \frac{mg}{ES}.\frac{L}{2}.$$

Така цялото удължение на нишката в този случай е:

(4) $$\Delta L_2 = \Delta L' + \Delta L'' = \frac{mg}{ES}.\frac{L}{2}\left(1+\frac{1}{2}\right).$$

(Подобна задача – за намиране общото удължение на последователно свързани пружини или еластични нишки, се среща често в сборниците със задачи по физика.)

Накрая по същия начин ще разгледаме случая, когато масата m е разделена на n равни части, които са окачени върху безтегловната нишка на равни разстояния L/n една от друга. Нека освен това, както в предишния случай, разтягането на всяка от n-те на брой части е блокирано с помощта на безтегловен и неразтеглив конец с дължина L/n – получаваме ситуацията от фиг. 3, а.

Когато прекъснем най-долния конец, се разтяга само най-долната част от нишката и удължението ѝ $\Delta L'$ се определя от закона на Хук:

(5) $$\frac{m}{n}g = \frac{ES}{L/n}.\Delta L', \text{ т. е. } \Delta L' = \frac{mg}{ES}.\frac{L}{n}.\frac{1}{n}.$$

Ако след това прекъснем следващия конец, вторият участък от нишката с дължина L/n се удължава с $\Delta L''$ под действие на сила $2mg/n$:

(6) $$\frac{2mg}{n} = \frac{ES}{L/n}.\Delta L'', \text{ т. е. } \Delta L'' = \frac{mg}{ES}.\frac{L}{n}.\frac{2}{n}.$$

Ясно е, че когато прекъснем k-тия конец, удължението на k-тата (броено отдолу нагоре) част на нишката ще бъде:

(7) $$\Delta L^{(k)} = \frac{mg}{ES}.\frac{L}{n}.\frac{k}{n}.$$

По такъв начин общото удължение на нишката се свежда до намиране сумата на една аритметична прогресия:

(8) $$\Delta L_n = \Delta L' + \Delta L'' + \ldots + \Delta L^{(k)} + \ldots + \Delta L^{(n)} = \frac{mg}{ES}.\frac{L}{n^2}(1+2+\ldots+k+\ldots+n) = \\ = \frac{mgL}{2ES}.\frac{n(n+1)}{n^2}.$$

На края, за да получим равномерно разпределение на масата по цялата дължина на нишката, следва да направим граничния преход $n \to \infty$. В този случай отношението $\frac{n(n+1)}{n^2} = 1 + \frac{1}{n}$ клони към единица и за търсеното провисване окончателно получаваме:

(9) $$\Delta L = \frac{1}{2}.\frac{mg}{ES}L.$$

С други думи, под действие на собствената си тежест една еластична нишка (или пружина) се удължава два пъти по-малко, отколкото ако цялата ѝ маса е съсредоточена в долния ѝ край.

От формула (9) се вижда кога провисването на нишката може да се пренебрегне спрямо собствената ѝ дължина. За да формулираме съответния критерий трябва да отчетем, че според закона на Хук ($F = ES\dfrac{\Delta L}{L}$) величината ES представлява силата, която предизвиква удължение ΔL, равно на дължината L на нишката. При това положение от формула (9) следва, че **провисването на нишката (пружината), може да се пренебрегне спрямо дължината й, ако нейната тежест е много по-малка от силата, която предизвиква удължение, равно на началната й дължина.**

Лесно се съобразява, че ако в долния край на нишката е окачено тяло с маса M, общото удължение (т.е. сумата от провисването и от удължението, предизвикано от силата Mg) ще бъде като на безмасова пружина, на която е окачено тяло с маса $M + m/2$.

Резултатът показва, че направеното в началото предположение не е вярно: докато в динамичния случай масата на нишката участва във формулата за периода с коефициент 1/3, в статичния случай, когато се пресмята удължението на нишката, коефициентът е по-голям – 1/2. С други думи влиянието на собствената маса върху трептенията е по-малко, отколкото върху удължението. Тази разлика вероятно има своето обяснение, но то не е предмет на разглеждане тук.

Формула (9) би могло да се получи много по-кратко чрез интегриране, но това извежда разглежданията извън рамките на училищната програма по математика. Предлаганото тук решение не напуска тези рамки, но въпреки това задачи като тази не фигурират в сборниците със задачи по физика. Причина за това е може би фактът, че в определена степен тежестта на решението се измества от физичния проблем към математичния апарат, използван за решаването му. Въпреки това, в някои случаи задачата би могла да се окаже подходяща за осъществяване на междупредметна връзка с обучението по математика, тъй като според последните програми по този предмет [3], на първо равнище в 11. клас се изучават крайни и безкрайни числови редици, формулата за сума на аритметична прогресия, а на второ равнище – и въпросите, свързани с граница на числови редици. В същия клас профилираната подготовка по физика включва изучаване на закона на Хук [4], който е необходим за записване на равенство (1). Разглеждането на подобни задачи дава възможност на учениците да приложат наученото по математика за решаване на интересни физични проблеми.

Енергия на провиснала пружина. Използваният за решаване на задачата метод може да се приложи и за намиране на енергията, натрупана в “саморазтегналата” се нишка. За целта ще сумираме енергиите, натрупани във всяка от n-те нейни части, като отчитаме, че коефициентът на еластичност на всяка от тях е $k_n = \dfrac{ES}{(L/n)} = \dfrac{ES}{L}n$. Освен това вземаме предвид израза (5) за $\Delta L'$ и познатата от 9. клас формула $\dfrac{k}{2}(\Delta L)^2$ за енергия на нишка, удължена с ΔL (вж. напр. [5], стр.145). Така намираме, че когато освободим най-долния участък от нишката, при удължаването му с $\Delta L'$, в него се натрупва енергия:

$$\Delta W' = \frac{k_n}{2}(\Delta L')^2 = \frac{1}{2}\frac{ES}{L}n\left(\frac{mg}{ES}\frac{L}{n^2}\right)^2 = \frac{(mg)^2}{2ES}.\frac{L}{n^3}\,. \tag{10}$$

По същия начин, при удължаването $\Delta L''$ (6) на следващия участък, в него се натрупва енергия:

$$\Delta W'' = \frac{(mg)^2}{2ES}.\frac{L}{n^3}2^2, \tag{11}$$

а при удължаване на k-тия участък – енергия:

(12) $$\Delta W^{(k)} = \frac{k_n}{2}\left(\Delta L^{(k)}\right)^2 = \frac{(mg)^2}{2ES}.\frac{L}{n^3}k^2 .$$

Търсената енергия е сума от всички $W^{(k)}$:

(13) $$W_n = \Delta W' + \Delta W'' + \ldots + \Delta W^{(n)} = \frac{(mg)^2}{2ES}.\frac{L}{n^3}\left(1^2 + 2^2 + \ldots + n^2\right).$$

Според справочниците по математика, формулата за сумата от квадратите на първите n естествени числа е:

(14) $$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

С нейна помощ за енергията W_n получаваме:

(15) $$W_n = \frac{(mg)^2}{2.6ES}L\frac{n(n+1)(2n+1)}{n^3} = \frac{(mg)^2}{2.6ES}L\left(2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}\right).$$

Като оставим броя на участъците, на които е разделена нишката, да расте неограничено, последните две събираеми в израза в скобите клонят към нула и за енергията на провисналата нишка получаваме:

(16) $$W_{\text{ел}} = \frac{(mg)^2 L}{6ES}.$$

Натрупаната в нишката енергия е означена с $W_{\text{ел}}$, тъй като се дължи на нейните еластични свойства.

Като отчетем (9), резултатът (16) може да се изрази не чрез цялата дължина на нишката, а чрез провисването ΔL:

(17) $$W_{\text{ел}} = \frac{1}{3}mg\Delta L .$$

Парадоксът с "изчезналата" енергия. Системата, която разглеждаме представлява една нишка. Силата на тежестта е външна за тази система и по самото определение за енергия, работата на тази сила е равна на промяната на енергията на системата. Нека пресметнем колко работа $A_{\text{гр}}$ извършва силата на тежестта при провисване на нишката, за да установим дали резултатът съвпада с натрупаната в нишката енергия $W_{\text{ел}}$.

Тъй като неразтегнатата нишка е хомогенна, центърът на масите ѝ се намира в нейната среда: и под него, и над него се намират части от нишката с маса $m/2$. Общото разстояние Δh, на което се спуска центърът на масите, е сума от две величини. Първата от тях $-\Delta h'$, представлява провисването на горната половина на нишката под действие на собствената ѝ тежест $mg/2$. Според формула (9) това провисване е:

(18) $$\Delta h' = \frac{1}{2}\frac{(m/2)g}{ES}\frac{L}{2}.$$

Втората величина, $\Delta h''$, представлява удължението на горната половина на нишката, предизвикано от теглото $mg/2$ на долната половина. В съответствие с формула (1) то е:

(19) $$\Delta h'' = \frac{(m/2)g}{ES}\frac{L}{2}.$$

От (18) и (19), и като използваме (9), за общото разстояние, на което се спуска центърът на масите на нишката, намираме:

(20) $$\Delta h = \Delta h' + \Delta h'' = \frac{3}{8}\frac{mg}{ES}L = \frac{3}{4}\Delta L .$$

Следователно работата на гравитационната сила е:

(21) $$A_{\text{гр}} = mg\Delta h = \frac{3}{4} mg\Delta L\,.$$

Едно сравнение между (17) и (21) показва, че работата на силата на тежестта $A_{\text{гр}}$ е по-голяма от натрупаната в пружината енергия $W_{\text{ел}}$:

(22) $$A_{\text{гр}} - W_{\text{ел}} = \frac{3}{4} mg\Delta L - \frac{1}{3} mg\Delta L = \frac{5}{12} mg\Delta L > 0\,.$$

Тази в известен смисъл неочаквана констатация поставя въпроса какво става със закона за запазване на енергията – къде отива енергията $\frac{5}{12} mg\Delta L$?

Възникналият "парадокс" е, разбира се, привиден. Проблемът обаче е по-общ, т.е. не е свързан с обстоятелството, че нишката е масивна. Затова, за да го изясним, ще го опростим, като разгледаме идеализирания случай на безмасова нишка с дължина L и коефициент на еластичност k, на която е окачено тяло с маса M. Разглеждаме две състояния на тази система. В първото нишката не е разтегната, което означава, че тялото лежи върху подставка, която му действа с реакция на опората Mg, насочена нагоре. Енергията на системата в този случай е нула. След това издърпваме подставката встрани (работа при това не се извършва!), нишката провисва и под действие на силата на тежестта (външна сила) и на силата на еластичност (вътрешна сила) тялото се спуска на разстояние, което по закона на Хук е $\Delta L = \frac{Mg}{k}$ и преминава във второто си състояние. При прехода от началното в крайното състояние силата на тежестта извършва работа $Mg\Delta L = \frac{(Mg)^2}{k}$. Според вече използваната формула $\frac{k}{2}(\Delta L)^2$, натрупаната в нишката енергия е:

(23) $$W_{\text{ел}} = \frac{1}{2} k (\Delta L)^2 = \frac{1}{2} k \left(\frac{Mg}{k}\right)^2 = \frac{(Mg)^2}{2k}\,,$$

т.е. – точно половината от работата на силата на тежестта. Вижда се, че в качествено отношение проблемът е както при масивната нишка: къде отива другата половина от работата на силата на тежестта? (Разликата от преди е само в коефициента – за масивната нишка той бе 5/12, за безмасовата – 1/2.)

За разплитане на проблема може да помогне припомнянето на съвсем друга, но аналогична ситуация: кондензатор с капацитет C и заряд Q има енергия $\frac{Q^2}{2C}$. Ако го свържем с друг идентичен, но незареден кондензатор, зарядът Q се разпределя по равно между тях и общата запасена в кондензаторите електрична енергия се оказва $\frac{(Q/2)^2}{2C} + \frac{(Q/2)^2}{2C} = \frac{Q^2}{4C}$, т.е. – точно половината от началната енергия. В този случай също възниква въпросът какво става със закона за запазване на енергията. Още Файнман в своите лекции обръща внимание на факта, че такъв въпрос възниква често, когато енергията е квадратична функция от някой от параметрите на системата (заряда Q при кондензаторите, удължението ΔL при нишките и пружините). Този проблемът се дискутира често (вж. напр. [6], стр. 166), но за читателите, които не разполагат с този източник ще припомним, че в сборниците със задачи по физика, в които се разглежда задачата за кондензаторите, обикновено се казва, че част от половината на началната енергия се отделя във вид на джаулева топлина в съединителните проводници, а другата част се излъчва в околното пространство по време на преходния колебателен процес в образувания от двата кондензатора и свързващите ги проводници трептящ кръг. Тези обяснения отчитат, че на практика преходът от едно статично състояние (един зареден кондензатор) към друго статично състояние (два заредени кондензатора) се осъществява посредством състояния, които не са статични – протича променлив ток. Ако желаем да останем в рамките на електростатиката, трябва да си представим, че с помощта на подходяща външна сила, породена от някакъв източник, пренасяме заряда $Q/2$ **безкрайно бавно** от заредения към незаредения кондензатор. Тази сила трябва във всеки момент да противодейства и да уравновесява отблъскването между двата заряда с големини $Q/2$, за да не получи този, който пренасяме към незаредения кондензатор, крайна скорост (т.е. – да не протече ток). Следователно работата, която извършва тази външна сила, е отрицателната, а това означава, че енергията на нейния източник нараства. При такава постановка на въпроса е ясно, че половината от началната енергия на кондензатора се преобразува в енергия на този външен източник.

Аналогична е и ситуацията с пружинното махало. И тук имаме две **статични** състояния: начално, в което тялото с маса M лежи върху подставка и нишката не е разтегната, и крайно, в което нишката се е удължила с ΔL . Ако преходът от началното към крайното състояние осъществим, като издърпаме подставката встрани, тялото ще придобие определена крайна скорост надолу и ще започне да **трепти**. Крайното статично състояние се установява едва след затихване на тези трептения. Формула (23) представлява израз за онази част от началната гравитационна потенциална енергия на тялото, която се разсейва в околното пространство при затихване на въпросните трептения.

Ако искаме, както при кондензаторите, да не излизаме извън рамките на статиката, трябва да си представим, че в началото не просто издърпваме подставката встрани, а постепенно намаляваме големината на силата, с която поддържаме тялото неподвижно, намаляваме я от Mg до нула така, че във всеки момент сумата от тази сила и силата на еластичност да бъде Mg. При това положение тялото ще достигне крайното положение **безкрайно бавно** и трептения няма да възникнат. Ясно е, че при този процес силата, която поддържа тялото, извършва отрицателна работа (силата е насочена нагоре, а преместването на приложната ѝ точка е надолу). Това от своя страна означава, че енергията на източника, който осигурява въпросната сила, нараства. И така – “липсващата” енергия се натрупва в източника, който осигурява **квазистатичност** на прехода от началното към крайното състояние, т.е. преход, във всеки момент от който системата може да се смята статична.

Авторът изказва благодарност на доц. Виктор Иванов, без чиито критични бележки някои от изложените по-горе резултати биха получили неправилно тълкуване.

Литература

1. **Попов Цв., И. Георгиев, К. Георгиева**, Физика, С., 2006, с. 325.
2. **Н. Велчев** и др., Експериментални задачи по физика, 9. – 11. клас за олимпиади, С., Народна просвета, 1979.
3. Учебна програма по математика и информатика за 11. клас, С., Математика и информатика, № 2, 2002.
4. **Попов Хр.** и др., Физика и астрономия, 11. клас, С., Просвета, 2002.
5. **Попов Хр.** и др., Физика и астрономия, 9. клас, С., Просвета, 2002.
6. **Попов Хр.**, 53 + 15 решени физични задачи, С., Просвета, 2000.