

За критичната плътност на Вселената¹

Въпросите за далечното минало и за далечното бъдеще на Вселената вълнуват широк кръг от хора. Вероятно това е причината на тях да бъде посветен един урок в учебника по астрономия за 11. клас (1, урок 16). В него се посочва, че в зависимост от стойността на средната плътност ρ на материята, бъдещето на Вселената може да бъде съвсем различно. Ако $\rho > \rho_k$, където ρ_k е така наречената *критична плътност*, вселената е отворена и днес наблюдаваното нейно разширяване ще продължи неограничено. Ако $\rho < \rho_k$, Вселената е затворена и ще настъпи момент, в който разширяването ще спре, след което ще започне обратният процес на свиване. Граничната ситуация в учебника не е коментирана, но ученикът явно трябва да предполага, че при $\rho = \rho_k$ разширяването ще спре, без да бъде последвано от свиване.

В тези разглеждания ключова роля играе величината ρ_k – критичната плътност на Вселената. За нея в (1, с. 150) е посочена приблизителна стойност – 10^{-30} g/cm^3 . Въпросът, който ще ни занимава по-долу, е как се получава това число. У читателите на научно-популярна литература се създава впечатление, че то е един от резултатите на общата теория на относителността и, че за да се разбере произходът му, е необходимо да се владее тази сложна теория. Всъщност, нещата не стоят точно така – израз за ρ_k може да се получи и в рамките на класическата физика със средствата, с които разполага всеки ученик, който в 9. клас е изучавал физиката като свободно избираем предмет.

Кои са необходимите **опорни факти**, с чиято помощ може да се изведе формула за ρ_k и от нея – да се пресметне стойността ѝ? Те са няколко.

Първи опорен факт. *Гравитационната потенциална енергия на взаимодействие E_p между материални точки с маси m и m' , отстоящи на разстояние r една от друга, се описва с формулата:*

$$(1) \quad E_p = -G \frac{mm'}{r},$$

където $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N.m}^2/\text{kg}^2$ е гравитационната константа.

Формула (1) не се изучава, но тя може да се свърже със знанията от СИП по физика в 9. клас. В пособието (2, с.33) е посочено, че потенциалната енергия на взаимодействие между два точкови заряда q и q' се описва с израза:

$$(2) \quad W = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0 r}.$$

Аналогията между закона на Кулон и закона на Нютон за гравитацията гарантира, че щом W се описва с (2), то E ще се описва с (1). Единствената разлика е в знака и тя се дължи на факта, че докато едноименните заряди се отблъскват, едноименните маси се привличат (масите на всички тела са положителни числа). Ето защо всички формули, свързани с работата на едните и на другите сили, ще се различават по знак. (Потенциалната енергия е равна на работата на съответната сила при отнасяне на тялото или на заряда до безкрайност!)

От формула (1) следва важен извод: *гравитационната потенциална енергия е винаги отрицателна величина.*

Втори опорен факт. *Пълната механична енергия на една система, телата на която си взаимодействат с гравитационни сили, може да бъде както положителна, така и отрицателна величина.* Наистина, пълната механична енергия E е сума от общата кинетична енергия E_k на телата от системата и от гравитационната потенциална енергия E_p на взаимодействието между тях:

$$(3) \quad E = E_k + E_p.$$

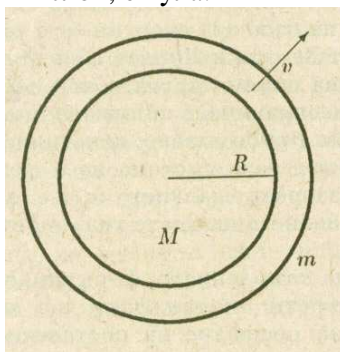
¹ За критичната плътност на Вселената, Физика, 3, 1992, с. 12–15.

Както бе отбелязано, $E_p < 0$, като стойността ѝ зависи само от разстоянията между телата. От своя страна E_k , която е винаги положителна, зависи от скоростите на телата. Ако тези скорости са достатъчно големи, то $E_k > |E_p|$ и $E = E_k + E_p > 0$. В противен случай, когато скоростите на телата (грубо казано) не са достатъчно големи, $|E_p| > E_k$ и $E = E_k + E_p < 0$. Последният случай се реализира например, когато телата са неподвижни: гравитационната енергия на всяка система от неподвижни тела е отрицателна величина.

Трети опорен факт. *Телата на една механична система, в която действат само гравитационни сили, могат да се раздалечатат неограничено, само ако пълната механична енергия на системата не е отрицателна.* Наистина, ако са безкрайно далече едно от друго, телата не си взаимодействат с гравитационни сили, $E_p = 0$ и от $E_k \geq 0$ и (3) следва $E \geq 0$. Обратно, ако пълната механична енергия на една система е отрицателна, движението на телата в тази система е финитно, т.е. остава в ограничена област, тъй като законът за запазване на механичната енергия не позволява системата да достигне състояние, в което $E \geq 0$ (когато телата са безкрайно раздалечени).

Земята и Луната например образуват типична система с отрицателна обща механична енергия. Ако в даден момент бихме могли да променим само посоката на движение на Луната, така че тя да започне да се отдалечава от Земята по правата, която свързва центровете им, разстоянието между тях би нараствало само до момента, в който гравитационната потенциална енергия на системата стане равна на пълната енергия – в този момент Земята и Луната са неподвижни една спрямо друга. След него започва неограничено сближаване на двете тела. Грубо казано, кинетичната енергия на двете тела не е достатъчно голяма за преодоляване на гравитационното им привличане и разрушаване на системата, т.е. за раздалечаването на телата до безкрайност.

Именно третият опорен факт ще ни помогне да решим поставения проблем – да намерим израз за r_k . Да си представим, че материята във Вселената е разпределена равномерно с плътност ρ , и да разгледаме системата, образувана от две тела – кълбо с радиус R и един тънък сферичен слой около него, масата на който е m (фиг. 1). В (1, с.150) се посочва, че поведението на слоя се определя само от силите, с които му действа кълбото, защото разположените извън слоя маси го привличат “равномерно от всички страни”. Вместо това не съвсем ясно твърдение, бихме могли да припомним нещо, отново известно от 9. клас. От електростатиката се знае, че вътре в заредена метална сфера електрично поле няма. Тъй като зарядите се разпределят върху сферата равномерно, следва да заключим, че равномерно зареден сферичен слой не създава поле вътре в кълбото, по чиято повърхност е разположен. И отново аналогията между законите на Кулон и на Нютон гарантира, че и маси, разположени равномерно в един сферичен слой, няма да създават гравитационно поле вътре в кълбото, заградено от слоя. Тъй като материята извън слоя, изобразен на фиг. 1, може да се представи като съставена от подобни концентрични слоеве, то наистина общата гравитационна сила, с която тя действа на разглеждания слой, е нула.



Фиг. 1.

И така, гравитационното поле в точките от сферичния слой се определя само от масата, съсредоточена в кълбото. Известно е обаче, че за тези точки то е същото, каквото би било, ако цялата маса M на кълбото е съсредоточена в центъра му. (И този факт следва от аналогията с електростатиката.) Следователно потенциалната енергия на взаимодействие между кълбото и елемент от слоя, имащ маса Δm , според формула (1)

ще бъде $\Delta E_p = -G \frac{M \Delta m}{R}$. Тъй като всички подобни елементи на слоя отстоят на едно и също разстояние R от центъра на кълбото, след сумиране на потенциалните енергии на всички елементи за общата потенциална енергия на разглежданата система получаваме:

$$(4) \quad E_p = -G \frac{Mm}{R}.$$

Тази система обаче притежава и кинетична енергия, тъй като Вселената се разширява. Нека означим с v скоростта на разглеждания слой. Тъй като масата му е m , тази енергия е $E_k = \frac{mv^2}{2}$, тъй че за пълната механична енергия намираме:

$$(5) \quad E = \frac{mv^2}{2} - G \frac{Mm}{R}.$$

Според третия опорен факт, поведението на системата зависи от значението на E . При $E > 0$ разширението продължава неограничено (отворена Вселена), а при $E < 0$ то е ограничено и се последва от свиване (затворена Вселена). Ако изразим масата на кълбото чрез плътността му по формулата $M = \frac{4}{3} \pi R^3 \rho$ и отчетем, че съгласно със закона на Хъбл (1, с. 145) скоростта на слоя е $v = HR$, където H е константата на Хъбл, за пълната механична енергия получаваме:

$$(6) \quad E = \frac{1}{2} m R^2 \left(H^2 - G \frac{8}{3} \pi \rho \right)$$

– израз, от който се вижда, че знакът на E зависи единствено от плътността ρ (останалите величини в скобите са константи). Критичната плътност, при която след преустановяване на разширяването не следва свиване, се определя от условието $E = 0$, от което окончателно намираме:

$$(7) \quad \rho_k = \frac{3H^2}{8\pi G}.$$

След заместване на стойностите на G и на H (за H вземаме долната граница на посочения в (1, с.147) интервал) за ρ_k се получава приблизително посочената в началото стойност.

В заключение може да се направи следната забележка. В началото не случайно бе използван терминът “плътност на материята”, а не по-често срещаният термин “плътност на веществото”. Работата е там, че всяка материя, била тя във формата на вещество или във формата на лъчение, участва в гравитационното взаимодействие². Затова, когато се говори за средна плътност на Вселената, трябва да се отчита както масата на веществото, така и масата на лъчението ($m = \frac{E}{c^2}$!).

² Статията е писана по времето, когато за тъмно вещество и за тъмна енергия още не се говореше така активно, както понастоящем.

Литература

1. Николов Н. и др. *Астрономия за 11. клас на СОУ, С.*, Просвета, 1991.
2. Попов Хр. *Физика, Учебно помагало за СИП в 9. клас на ЕСПУ, С.*, Народна просвета, 1989.