Център на масите и/или център на тежестта
(Защо Луната е обърната винаги
с една и съща своя половина към Земята)

На една от ежегодните конференции по физика колежка ме изненада с въпроса "Център на тежестта и център на масите синоними ли са?". Без да се замисля много, набързо отговорих "Да, защото за всяко тяло двете точки *практически* съвпадат." Тогава последва логичният втори въпрос "Защо тогава не използваме само единия термин?", на който не можах да отговоря. Този кратък разговор стана повод да се замисля по-сериозно над първия въпрос. Опитах да си спомня къде в училищните програми по физика и астрономия става дума за център на масите и не можах да открия такова място – равнището на изучаване на механиката сега е слязло толкова ниско, че спокойно минаваме без това понятие. Но от гледна точка на физиката нещата не са толкова прости и бързо стигнах до заключение, че с прибързаното "Да", съм подвел колежката. Добре поне, че, застраховайки се несъзнателно, бях вмъкнал думата "*практически*". Защото за явленията, които разглеждаме не само в училище, но и при условията близо до земната повърхност, за всички тела двете точки – центърът на масите и центърът на тежестта, наистина **практически** съвпадат.

Това – практически, но как все пак стои въпросът "теоретически"? За да отговорим, трябва да припомним съответните определения. Първо поглеждаме в един учебник[1], който десетилетия служи като еталон за прецизно спазване принципа за научност. В него, на стр. 98 четем:

"*Опитът показва, че една единствена сила може да уравновеси резултантната сила на тежестта $\vec{G}$ на тялото, ако е приложена в подходяща точка от тялото. Тази точка можем да смятаме и за приложна точка на резултантната сила на тежестта $\vec{G}$ на тялото. Тя си нарича* ***център на тежестта****.*

Ако на тялото действат и други сили, приложени в различни негови точки, те също могат да се разглеждат като вектори, които могат да се пренасят успоредно на себе си. По този начин всички сили могат да се пренесат така, че приложните им точки да съвпаднат с центъра на тежестта. Под действие на резултантната на тези сили центърът на тежестта на тези сили ще се движи като материална точка, в която е съсредоточена цялата маса на тялото. Поради това центърът на тежестта на тялото се нарича и ***център на масата."***

И така, без никакви условности, излиза, като че ли център на тежестта и център на масата наистина са две названия за едно и също понятие. Даденото определение за *център на тежестта* практически съвпада с определението в един от последните учебници по физика и астрономия за 8. клас[2] (стр. 54):

"*Точката, в която ако окачим едно тяло, то се намира в безразлично равновесие, се нарича център на тежестта на тялото."*

Ако знаем какво се нарича приложна точка на сила (или по-скоро – ако знаем как се намира приложна точка на сума от няколко сили, които действат в различни точки на едно тяло), определението за *център на тежестта* можем да изкажем и така:

Център на тежестта на едно тяло наричаме приложната точка на силата на тежестта, действаща на тялото.

По-нататък, когато коментираме връзката център на тежестта – център на масите, ще имаме предвид това определение. То звучи по-добре от предишното, но не е толкова операционално – не показва как да определяме центъра на тежестта.

---

[1] **Борисов М.** и др. Физика за 9. клас, С., Народна просвета, 1974.
[2] **Попов Хр., В. Караиванов, В. Иванов** Физика и астрономия за 8. клас, Просвета София, 2009.

Определение за *център на масите* намираме на стр. 60 в един почти не влязъл в употреба учебник от 2001 г.[3]. Там е посочено, че ако две тела с маси m_1 и m_2 се намират в точки с радиус-вектори $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$, точката с радиус-вектор:

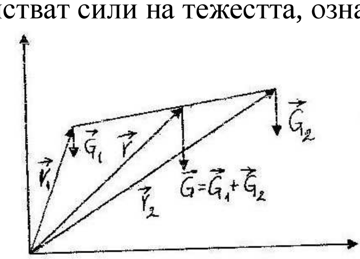
$$\vec{r} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2} \tag{1}$$

се нарича *център на масите* на системата. Физическата особеност на тази точка, която я отличава от останалите точки в системата (тялото) е, че нейното ускорение зависи само от сумата на всички външни сили, които действат на системата и се определя от втория принцип на Нютон. В частност, ако системата е затворена (няма външни сили), центърът на масите се движи равномерно и праволинейно.

Преди всичко да отбележим, че поне в едно отношение понятието център на масите е по-общо от понятието център на тежестта: център на масите можем да дефинираме за **всяка** система (напр. за системата Земя–Луна, за Слънчевата система, за един атом и т.н.), докато за център на тежестта говорим при телата, като при това обикновено подразбираме *твърди* тела[4]. Те могат да се разглеждат като частен случай на системи – системи от материални точки, разстоянията между които са фиксирани.

Второ, за *център на масите* можем да говорим винаги, докато за да говорим за *център на тежестта* трябва преди всичко за посочим в какво гравитационно поле се намира нашето тяло или система от тела. Тъкмо това в повечето случаи се изпуска, защото в повечето случаи по подразбиране се има предвид земното гравитационно поле в близост да земната повърхност, където то е хомогенно. Както ще видим обаче, когато говорим за тела в Космоса, нещата стоят по друг начин.

За да разберем разликата между *център на масите* и *център на тежестта,* трябва първо и за центъра на тежестта да изведем формула, подобна на формула (1). За простота отново разглеждаме системата от две тела с маси m_1 и m_2, които се намират в точки с радиус-вектори $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$. Нека означим с $l = |\vec{r}_2 - \vec{r}_1|$ фиксираното разстояние между тях. На точките действат сили на тежестта, означени на фиг. 1 съответно с $\vec{G}_1$ и



Фиг. 1

$\vec{G}_2$. В този най-прост случай радиус-векторът $\vec{r}$ на *центъра на тежестта* очевидно лежи на отсечката, която съединява точките, т.е. векторът $\vec{r} - \vec{r}_1$ е еднопосочен с вектора $\vec{r}_2 - \vec{r}_1$. (Последният можем да смятаме известен, тъй като положенията на телата са зададени.) Еднопосочността изразяваме с равенството:

$$\vec{r} - \vec{r}_1 = \lambda(\vec{r}_2 - \vec{r}_1), \tag{2}$$

в което неизвестния положителен коефициент λ можем да определим като отчетем, че според правилото за равновесие на лостове:

$$G_1 l_1 = G_2 l_2 = G_2(l - l_1).$$

[3] **Попов Хр.** и др. Физика и астрономия за 10. клас, профилирана подготовка, Просвета София, 2001.

[4] Разбира се, при желание можем да говорим и за център на тежестта на системата Земя–Луна, защото и двете тела се намират в гравитационното поле на Слънцето, но от това едва ли ще спечелим нещо – за обясняване на движенията в тази система значение има центърът на масите.

Тук с l_1 и l_2 сме означили разстоянията от двете тела до центъра на тежестта. От последното уравнение за l_1 получаваме израза:

(3) $$l_1 = \frac{G_2}{G_1 + G_2} l \qquad \text{или} \qquad \left|\vec{r} - \vec{r}_1\right| = \frac{G_2}{G_1 + G_2} l \, .$$

Като вземем модул от двете страни на (2) и отчетем (3), намираме, че:

$$\lambda = \frac{\left|\vec{r} - \vec{r}_1\right|}{l} = \frac{G_2}{G_1 + G_2} \, .$$

Заместваме тази стойност на λ в (2), решаваме полученото уравнение спрямо $\vec{r}$ и за неизвестния радиус вектор на *центъра на тежестта* получаваме:

(4) $$\vec{r} = \frac{G_1 \vec{r}_1 + G_2 \vec{r}_2}{G_1 + G_2} \, .$$

Така стигаме най-съществения пункт за изясняване на разликата между двете интересуващи ни понятия! Ако сега използваме връзката между силата на тежестта, масата и земното ускорение g и заместим в (4) G_1 и G_2 съответно с $m_1 g$ и $m_2 g$, земното ускорение в дясната страна на равенството се съкращава и получаваме точно израза (1) за радиус-вектор на център на масите.

Следователно, в ***този*** случай *центърът на тежестта* наистина съвпада с *центъра на масите*! Коя обаче е особеността, заради което слагаме ударението на думата "този"? Особено е обстоятелството, че интензитетът на гравитационното поле в местата, където се намират двете тела, **е един и същ**, т.е. – полето е хомогенно (еднородно). Само благодарение на този факт g се съкрати и изчезна от дясната страна на формулата! Какво би станало обаче, ако това условие не е изпълнено и, например, земното ускорение в точката, където се намира първото тяло е g_1, а където се намира второто – g_2? (За да не усложняваме повече разглежданията, ще забравим, че всъщност земното ускорение е вектор и на различни места в пространството може да има не само различна големина, но и различна посока.) В този случай би трябвало в (4) да заместим $G_1 = m_1 g_1$ и $G_2 = m_2 g_2$, ускорението няма да се съкрати от числителя и знаменателя на дробта и изразът за $\vec{r}$ ще бъде различен от този във формула (1).

Изводът: **Центърът на тежестта и центърът на масите на една система съвпадат само, когато действащото на системата гравитационно поле е хомогенно (еднородно).**

За да видим какво още следва за центъра на тежестта, нека наистина във формула (4) заместим $G_1 = m_1 g_1$ и $G_2 = m_2 g_2$. Получаваме:

(5) $$\vec{r} = \frac{m_1 g_1 \vec{r}_1 + m_2 g_2 \vec{r}_2}{m_1 g_1 + m_2 g_2} \, .$$

Ако сега например завъртим нашата система от две тела около определения по формула (5) център на тежестта, двете тела попадат на места, където вече стойностите на g_1 и g_2 са други и следователно друго ще бъде и положението на определения от (5) център на тежестта. Оттук и основната разлика между център на тежестта и център на масите:

Центърът на масите **на едно твърдо тяло представлява точка, която е фиксирана спрямо частите на тялото, докато положението на** ***центъра на тежестта*** **при промяна на положението на тялото може да се мести спрямо тези части.**

Кога се проявява тази разлика? – когато тялото се премести в *нехомогенно* гравитационно поле.

Може би тук е мястото да отбележим, че при преместване в нехомогенно гравитационно поле се измества не само центърът на тежестта – променя се и самата **сила на тежестта**. Наистина, по определение силата на тежестта на едно тяло е сума от силите, с които Земята привлича всички негови части. В нашия случай, когато разглеждаме система от две тела, силата на тежестта е $G = m_1 g_1 + m_2 g_2$. Ясно е, че когато m_1 и m_2 попадат в точки с други интензитети на гравитационното поле, и общата сила на тежестта (а не само центърът на тежестта!) ще се промени.

За тези, които не обичат формули с вектори, можем да изкажем направените разсъждения и с други думи:

Сила на тежестта на едно тяло наричаме сбора от силите, с които Земята привлича всеки малък елемент от тялото. Когато тялото се премести (завърти и/или транслира и/или и двете) в нехомогенно (нееднородно) поле, на елементите му действат променени гравитационните сили. Това предизвиква както промяна на тяхната сума – силата на тежестта на тялото, така и на нейната приложна точка – на центъра на тежестта.

А на практика? Строго погледнато, земното гравитационно поле не е хомогенно. Наистина, силата, с която Земята привлича тяло с маса m се определя от закона на Нютон за гравитацията:

$$F = G\frac{mM}{r^2}, \tag{6}$$

където M е масата на Земята, G – гравитационната константа, а r – разстоянието от тялото до центъра на Земята. Като сравним този израз с израза за силата на тежестта[5] $G = mg$, който фактически представлява определение за ускорението g на свободното падане, получаваме:

$$g = G\frac{M}{r^2}. \tag{7}$$

От този израз се вижда, че g наистина не е константа, а зависи от разстоянието до центъра на Земята, т.е. полето не е хомогенно. Този факт отбелязваме и в училище, когато при въвеждането на g казваме (макар и без да обясняваме защо), че земното ускорение зависи от надморската височина.

За да преценим кога тази нехомогенност се проявява на практика, ще означим с g_0 земното ускорение на повърхността на Земята:

$$g_0 = G\frac{M}{R^2}, \tag{8}$$

където с R сме означили радиуса на Земята. Нека сега по формула (7) изразим земното ускорение на височина h над земната повърхност:

$$g = G\frac{M}{(R+h)^2}.$$

Отношението g_0/g, пресметнато от последните две формули, е:

$$\frac{g_0}{g} = \frac{(R+h)^2}{R^2} = 1 + 2\frac{h}{R} + \left(\frac{h}{R}\right)^2.$$

Когато h е малко спрямо земния радиус, отношението $(h/R)^2$ е много по-малко от единицата, отколкото (h/R), и затова може да се пренебрегне. Така получаваме:

$$\frac{g_0}{g} = 1 + 2\frac{h}{R}. \tag{9}$$

В тази формула h може да означава както височина над Земята, така и размерите на едно тяло – тогава (9) ще определя порядъка на максималната разликата в земното

---

[5] Надяваме се, че читателят няма да се обърка от това, че с една и съща буква G означаваме различни величини – веднъж сила на тежестта, друг път – гравитационната константа. Просто такива са приетите за тези величини означения.

ускорение, което действа на различните части на тялото. Нека например тялото е кула с височина, колкото височините на най-високите постройки на Земята – примерно h = 640 m. Това число избираме не случайно, а за по-просто смятане, защото то е точно 10 000 по-малко от радиуса на Земята – R = 6400 km. В този случай g_0/g = 1,0002, така че ако в основата на кулата едно тяло тежи 10 kg, на върха й ще тежи с 2 g по-малко. Разликата не е голяма, но не е и ненаблюдаема.

И един хипотетичен експеримент. Представете си, че в краищата на здрав лек лост с дължина l = 6,4 m са закрепени две гири, всяка с маса m (нещо като щангите, които вдигат тежкоатлетите). За да различаваме гирите, ще ги номерираме с 1 и 2. Центърът на масите на тази система е в средата на лоста. Ако той е хоризонтален и го окачим в тази точка, лостът ще бъде уравновесен, тъй като двете гири са на еднакво разстояние от центъра на Земята. Според определението от цитирания по-горе учебник за 8. клас трябва да заключим, че тази точка е и център на тежестта на тялото. Дали обаче това равновесие е безразлично?

За да отговорим на въпроса ще си представим, че отклоняваме гирата 1 надолу – според казаното преди, тя попада в по-силно гравитационно поле, нейната тежест се увеличава, а тежестта на гира 2, която (неизбежно, защото са свързани с лост) се издига – обратно, намалява. Заради разликата в тежестите се появява въртящ момент, който се стреми да свали гира 1 още по-ниско (и съответно – гира 2 ще се окаже още по-високо), т.е. системата се отдалечава от равновесното си положение. Заключението е ясно: равновесието е било неустойчиво.

Какво става по-нататък? – лостът постепенно набира (ъглова) скорост, гира 1 слиза все по-ниско, гира 2 се издига все по-високо, докато лостът стигне вертикално положение. Сега трите сили – тежестите на двете гири и реакцията на въжето, на което са окачени, действат по едно направление, въртящият момент е нула, но набралият скорост лост преминават по инерция това положение и въртенето продължава в същата посока. Ситуацията обаче се променя: гира 1 се издига и нейната тежест намалява, а гира 2 слиза надолу и тежестта й расте. Все още обаче гира 1 е по-ниско от гира 2, тежестта й е по-голяма и затова въртящият момент след преминаване на вертикалното положение сменя посоката си и започва да забавя въртенето. С постепенното изравняване на височините на гирите обаче въртящият момент намалява, и когато лостът стане отново хоризонтален, той става нула, а двете гири са разменили местата си и отново са неподвижни. Последното твърдение следва от съображения, свързани със закона за запазване на енергията: ако допуснем обратното, т.е., че заемайки отново хоризонтално положение лостът продължава да се върти, ще излезе, че сме изобретили перпетуум-мобиле: тръгваме от едно статично положение, а след известно време, без да извършваме работа над системата, се връщаме в началното положение (хоризонтален лост), при което обаче телата имат и кинетична енергия.

Тъй като идеализираните ситуации на практика не се реализират, по време на разгледаното движение част от механичната енергия на системата ще се разсее, т.е. ще се преобразува във вътрешна енергия (напр. под действие на силите на съпротивление). При това положение лостът ще спре въртенето си преди да стигне хоризонталното положение, а това означава, че все още му действа въртящ момент и той ще започне движение в обратна посока. Ясно е, че ще започне някакво колебателно движение, подобно на движението на махало. И така, докато люлеенията затихнат и гирите не застанат една под друга – това е тяхното ново равновесно положение, което вече е положение на стабилно равновесие, защото ако ги отклоним малко от него, се появява въртящ момент, който се стреми да ги върне обратно.

Нека сега се опитаме да пресметнем къде е центърът на тежестта на нашата щанга. При това ще предполагаме, че когато лостът е вертикален, гира 1 е до земната повърхност. Тогава нейната тежест е $G_1 = mg_0$. В същото положение гира 2 е с l = 6,4 m по-високо и нейната тежест е $G_2 = mg$, където g се определя от формула (9), като в нея вместо h трябва да поставим l.

Търсеното положение на центъра на тежестта намираме, като отново приложим правилото за равновесие на лост: ако с l_1 и l_2 означим разстоянията от центъра на тежестта съответно до гира 1 и до гира 2, то правилото води до равенството $G_1 l_1 = G_2 l_2$. Всъщност, l_1 е точно търсената височина на центъра на тежестта над земната повърхност. Както при извода на формула (3), и сега получаваме:

$$l_1 = \frac{G_2}{G_1 + G_2} l .$$

Като заместим тук изразите за двете сили и отчетем формула (9), след прости преобразования получаваме:

$$l_1 = \frac{g}{g + g_0} l = \frac{1}{1 + \frac{l}{R}} . \frac{l}{2} .$$

Разглеждайте първата от дробите в дясно като сума на безкрайна геометрична прогресия, т.е. използвайте равенството:

$$\frac{1}{1 + \frac{l}{R}} = 1 - \frac{l}{R} + \left(\frac{l}{R} \right)^2 - \dots .$$

То позволява, както и преди, да пренебрегнем квадратичния и намиращите се след него членове, така че окончателно получаваме:

(10) $$l_1 = \frac{l}{2} - \frac{l^2}{2R} .$$

Интересно е, че този резултат не зависи от масите на гирите (когато са равни!). В началното положение, при хоризонтален лост, центърът на масите и центърът на тежестта съвпадат и се намират на височина $l/2$ над земята. При вертикалното положение на лоста центърът на масите си е останал в същото положение, а центърът на тежестта е слязъл с:

$$\Delta l = \frac{l^2}{2R} = \frac{6{,}4^2}{2.6400000} = 3{,}2.10^{-6} \text{ m}.$$

Този факт обяснява и стабилността на новото равновесно положение: знаем, че равновесието е стабилно, ако точката на окачване е **над** центъра на тежестта.

Очевидно е, че едно изместване на центъра на тежестта с някакви хилядни от милиметъра тук, на Земята няма никакво практическо значение. Лесно е да пресметнем, че от същия порядък е и относителното изменение на общата сила на тежестта при преминаване на лоста от нестабилното хоризонтално положение към стабилното вертикално положение. Следователно за работата на различни машини, за равновесието на инженерните съоръжения и пр., тук, на Земята, различието между център на масите и център на тежестта е без значение.

Не така стоят нещата обаче при движения в Космоса. Представете си, че сме пуснали нашата щанга в орбита над екватора. Вярно е, че на стотиците и хилядите километри над земната повърхност, където обикалят спътниците, нехомогенността на земното гравитационно поле е по-малка и това намалява коментирания ефект. В замяна на това обаче разстоянието между гирите можем да увеличаваме почти неограничено – там не е необходимо да ги свързваме със здрави лостове, защото при движението си те се намират в състояние на безтегловност и свръзката помежду им се намира под действие само на малката разлика от тежестите на двете гири.

В съгласие с всичко казано дотук следва да заключим, че една подобна щанга-спътник, по своята орбита би се ориентирала винаги така, че правата, свързваща двете гири да минава през центъра на Земята – това би било нейното устойчиво положение. Това свойство на нейното движение може да се използва практически: ако поместите на по-близката до Земята "гира" някаква апаратура, тя ще бъде насочена винаги към Земята, няма да има нужда да поставяте и двигатели за корекция на ориентацията.

А какво общо има всичко това с факта, че винаги виждаме една и съща половина на Луната?

Луната е тяло, което се движи в нехомогенното гравитационно поле на Земята. Тъй като нейната форма не е точно сферична, можем да си я представим мислено в ролята на разгледаната по-горе щанга, като лостът е успореден на голямата ос на Луната. В стабилното положение върху лунната орбита тази ос е насочена винаги към Земята, и затова ние виждаме все една и съща половина от лунната повърхност. Това положение Луната е заела постепенно – дълго дреме тя е извършвала около него люлеения, които постепенно са затихнали поради вътрешното триене между лунните пластове, предизвикано от приливните вълни в нея. Поради това триене механичната енергия на люлеенията се е преобразувала във вътрешна енергия на Луната.

Тема за размисъл: Дотук разглеждахме само случай, в който масите на двете гири са еднакви. Покажете, че в случая на ***съществено*** различни маси, устойчиво е само вертикалното положение на щангата, при което гирата с по-голяма маса е по-близо до Земята.

Помислете защо по-горе е поставено ударение върху думата ***съществено*?** Какво би станало, ако разликата между масите не е съществена? И колко голяма би трябвало да бъде тази разлика, за да смятаме, че тя е съществена?

Отговорите на тези въпроси можете да получите с помощта на използваните дотук средства.

Как разсъждават физиците? Следното разсъждение може да ви подскаже на качествено равнище защо бе употребена думата съществено.

Видяхме, че когато масите на двете гири са **точно** равни, и двете вертикални равновесни положения са устойчиви – няма значение дали по-близо до Земята е гира 1 или гира 2. С други думи, и в двата случая при малко отклоняване на лоста от вертикалата, се появява въртящ момент, който връща щангата в начално положение.

Да приложим сега метода на екстремните (граничните) случаи, когато масата на гирата, която е по-близо до Земята, е пренебрежимо малка спрямо масата на другата гира. Тогава е очевидно, че ако отклоним малко лоста от вертикално положение, въртящият момент ще е в обратна на предишната посока, щангата ще се отдалечи от началното си положение и ще започне да се люлее около положението, в което по-близо до Земята е масивната гира.

И така: щом при вертикален лост и равни маси равновесието е устойчиво, а при много различаващи се маси и когато масивната гира е по далече от Земята – неустойчиво, то има някаква разлика между масите, при която става преход от едното състояние към другото. Точно тя е границата между *съществените* и *несъществените* разлики в масите.

При този тип разсъждения казваме, че сме използвали *съображения за непрекъснатост.*

Още теми за размисъл.

1. Установихме, че когато лост с две еднакви гири в краищата се намира в нехомогенното земно гравитационно поле и когато опорната точка на лоста е в центъра на масите (т.е. – в средата на лоста), устойчиво е вертикалното положение, тъй като в този случай центърът на тежестта е под центъра на масите. Какво ще бъде равновесието на лоста, ако преместим точката на окачване в центъра на тежестта?

2. Обмислете какви промени в резултатите от хипотетичния опит биха настъпили, ако отчитаме и действието на Архимедова сила на намиращите се във въздуха гири. Не пропускайте да разграничите случаите, когато плътността на гирите и по-голяма, и когато е по-малка от плътността на въздуха.

3. Какъв ще бъде резултатът от хипотетичния опит, ако го проведем на Луната, т.е. там по-голямо или по-малко ще бъде изместването на центъра на тежестта на щангата в сравнение с това, което пресметнахме при земни условия (вж. формула (10))?

И по-нататък.

1. Освен за обсъдената по-горе особеност в движението на Луната, нехомогенните гравитационни полета са причина и за други природни явления. Нехомогенността например на гравитационното поле на самата Луна, в което се движи Земята, е причината за океанските приливи и отливи. Желаещите да научат повече за това явление, могат да потърсят следния източник:

Попов Хр. За праха в орбиталните станции и за океанските приливи. Физика, 5, 1994, с. 41 – 44.

2. Други интересни факти относно поведението на “щанга в Космоса” можете да намерите в книгата:

Маковецкий П.В. Смотри в корень!, Москва, Наука, 1979.