За значението на математичния апарат

Ние рядко осъзнаваме значението на математичния апарат, на математичната символика при излагане на една физична теория. Кой например би разпознал в равенството:

$$dF = -\frac{Q}{\varepsilon_0} \qquad (1)$$

уравненията на Максуел за електромагнитното поле във вакуум? Само наличието на константата ε_0 подсказва, че то има някаква връзка с електромагнитните явления. Равенство (1) съдържа същите връзки, които сме свикнали да записваме във вида:

$$\begin{aligned} rot\vec{E} &= -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \\ rot\vec{B} &= \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} + \mu_0\vec{I} \\ div\vec{E} &= \frac{\rho}{\varepsilon_0} \\ div\vec{B} &= 0\,. \end{aligned} \qquad (2)$$

Във вида (1) уравненията на Максуел са записани така, както ги е публикувал техният автор – с помощта на *кватерниони*. Очевидно е, че в по-компактен вид те не може да се запишат. И със сигурност това е и причината, поради която толкова малко хора в средата на 19. век са успели да схванат същността на теорията на Максуел – макар и известни, по онова време кватернионите не са били част от работния апарат на физиците–теоретици. Ето защо, едва след като Хенрих Херц и Оливър Хевисайд, независимо един от друг “превеждат” уравненията от езика на кватернионите на езика на векторите в тримерното пространство, теорията на Максуел придобива широка популярност и признание.

За да обясните на един човек, владеещ апарата на диференциалното смятане (т.е. който знае какво означават $\frac{\partial}{\partial t}$, rot и div), съдържащата се в системата (2) същност на теорията на Максуел, трябва само да му обясните как се дефинират характеристиките на полето –интензитетът $\vec{E}$ на електричното и индукция $\vec{B}$ на магнитното поле, както и характеристиките на източниците – плътностите на зарядите ρ и на токовете $\vec{I}$.

Записът на уравненията във вида (1) наистина е възможно най-компактен, но за вникване в същността им трябва преди всичко да кажем нещо за това, какво представляват *кватернионите*.

Обикновено, когато искаме да онагледим реалните числа, си служим с числовата ос: всяко реално число е координата на една точка от числовата ос. И обратно: на всяка точка от числовата ос съответства точно едно реално число. Когато увеличим броя на измеренията до две и излезем в равнината, всяка нейна точка вече има две реални координати. Добре известно е, някога дори това се учеше и в гимназията, че тези две координати може да се разглеждат като реална и имагинерна част на нов математичен обект – на едно *комплексно число*. За целта е достатъчно освен реалната единица да се въведе още една единица – *имагинерната*, чиито символ е i, а дефиниционното й свойство е $i^2 = -1$. И на тази основа се развива цялата алгебра на комплексните числа, след това апаратът на аналитичните функции и пр. – математически средства, чието значение във физиката е трудно да се надцени.

През 1843 г., размишлявайки в посока на увеличаване на броя на измеренията, ирландският математик Уйлям Хамилтън успява да изгради подобна алгебра в четиримерното пространство. Там положението на всяка точка се характеризира с четири реални числа и, за да ги обедини в един обект – ***кватернион***, освен реалната единица, Хамилтън въвежда още три единици, които се определят с равенствата:

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1,$$

а произведенията помежду им са съответно:

$$ij = -ji = k,\ jk = -kj = i, ki = -ik = j\ .$$

от последните равенства се вижда основната особеност на алгебрата на кватернионите – тя е некомутативна, т.е. произведението на два кватерниона зависи от това, кой е на първо и кой – на второ място.

При това положение всяка точка в четиримерното пространство с реални декартови координати (x_0, x_1, x_2, x_3) се представя с кватерниона:

$$X = x_0 1 + x_1 i + x_2 j + x_3 k = x_0 + \vec{v} = (x_0, \vec{v}),$$

като Хамилтън нарича x_0 *скаларна*, а $\vec{v}$ – *векторна* част на кватерниона. (Самият широко използван днес термин **вектор** е въведен също от Хамилтън.)

След тези оскъдни бележки относно кватернионите можем да кажем какво се крие в уравнение (1), т.е. – каква е връзката между използваните в него символи и символите, с които сме свикнали повече, когато излагаме електродинамиката на Максуел. Предварително ще отбележим, че за разграничаване на Хамилтоновия кватернион i от имагинерната единица, за последната запазваме означението $\sqrt{-1}$. При това положение под d, F и Q в (1) следва да разбираме:

$$F = E + \sqrt{-1}\, cB,$$

където

$$E = iE_x + jE_y + kE_z,$$
$$B = iB_x + jB_y + kB_z;$$

а освен това:

$$d = \frac{\sqrt{-1}}{c}\frac{\partial}{\partial t} + i\frac{\partial}{\partial x} + j\frac{\partial}{\partial y} + k\frac{\partial}{\partial z}$$

и

$$Q = \rho + \frac{\sqrt{-1}}{c}\left(iI_x + jI_y + kI_z\right)$$

Като се отчетат тези дефиниционни връзки и правилата за умножение на кватерниони, може да се провери директно, че наистина системите (1) и (2) са еквивалентни.

Въпреки компактността на кватернионния запис обаче, оказва се, че той не е удобен за отчитане изискванията на специалната теория на относителността – записът (1) не демонстрира ковариантността на теорията, т.е. видът на уравненията не е еднакъв във всички инерциални отправни системи.

Всъщност, и самите уравнения на Максуел не демонстрират в явен вид тази ковариантност. Тя проличава едва когато запишем уравненията с помощта на четиримерни вектори и тензори. За целта обемната плътност на зарядите и обемната плътност на токовете трябва да се разглеждат като компоненти на вектора на *четиримерната плътност на токовете* $I = (c\rho,\ \vec{I})$, а тримерните компоненти на $\vec{E}$ и $\vec{B}$ да се разглеждат като компоненти на два антисиметрични тензора от втори ранг:

$$F=\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{c}E_x & -\frac{1}{c}E_y & -\frac{1}{c}E_z \\ \frac{1}{c}E_x & 0 & -B_z & B_y \\ \frac{1}{c}E_y & B_z & 0 & -B_x \\ \frac{1}{c}E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \tilde{F}=\begin{pmatrix} 0 & -B_x & -B_y & -B_z \\ B_x & 0 & \frac{1}{c}E_z & -\frac{1}{c}E_y \\ B_y & -\frac{1}{c}E_z & 0 & \frac{1}{c}E_x \\ B_z & \frac{1}{c}E_y & -\frac{1}{c}E_x & 0 \end{pmatrix}$$

– *тензора на електромагнитното п*оле F и неговия *дуален* тензор $\tilde{F}$. Тогава, с помощта на четиримерния ∇-оператор (набла оператор:

$$\nabla=\left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right),$$

уравненията на Максуел може да се запишат в явно ковариантен вид:

(3) $$\nabla.F=\mu_0 I \qquad \text{и} \qquad \nabla.\tilde{F}=0.$$

(В лявата страна на тези уравнения стоят векторни произведения на вектор с тензор, образувани по правилата за умножение в пространството на Минковски.)

И така, пред нас са три системи от на пръв поглед напълно различни уравнения – системите (1), (2) и (3). Всички те имат едно и също физично съдържание – Максуеловата теория на електромагнитното поле във вакуум. Те демонстрират една обща тенденция: колкото по-абстрактна символика използваме за запис на физичните закономерности, толкова по-компактен вид има техния математичен израз. И когато в началото обявихме (1) за най-компактния вид на уравненията на Максуел, всъщност не бяхме съвсем прави. Бихме могли да направим още една крачка по пътя на абстракцията: да прехвърлим члена от дясната страна на (1) в ляво и да означим полученото с една буква – например *A*. Тогава уравненията на Максуел ще придобият наистина най-компактния си вид:

(4) $$A = 0.$$

Само че сега още по-дълго би трябвало да обясняваме какво разбираме под *A*. Това е добра илюстрация на една мисъл, която често обичаше да цитира акад. Хр. Христов: “Всяка идея, логически прокарана докрай, води до абсурд.” Равенството (4) е резултат от довеждане до абсурд на идеята за използване на все по-обобщени символи при изразяване на физичните закономерности. (Всеки ще се досети, че който и да е физичен закон в края на краищата може да се изрази с равенство от типа (4), в който *A* може да е скалар, вектор, тензор, спинор, кватернион...)

А какво ще се получи, ако продължим идеята в обратна посока, т.е. към другия й край: ако опитаме да изключим въобще математическата символика? Резултатът е това, което правим понякога в училище, за да изразим същността на основите на електродинамиката и може да намери например в папка II на този *Алманах*, във файловете \1 ED statii\1983a OZ na ENP и най-вече в \2 disertaciya\04 yadro. Независимо от това дали използваме езика на геометрията или езика на физиката, същността на този резултат е една: съвкупност от думи. (Между другото, в определен смисъл думите също са абстрактни символи.) Общото за двата крайни случая – и този, когато символиката се абсолютизира (съдържащ се в (1) или в (4)), и когато напълно избягваме математическите символи е, че те и двата еднакво добре *не работят* за практиката. Просто не са пригодени за пряко решаване на конкретни проблеми – например за обясняване на едно явление, или за предсказване съществуването друго явление. От подобна прагматична гледна точка най-подходяща за теорията на електромагнитните явления се оказва формата (2), която дължим на Херц и Хевисайд. Което, разбира се, не означава, че те следва да споделят заслугата на Максуел за създаване на теорията.

Защо Максуел е предпочел да представи теорията си на езика на кватернионите? Вероятно занимаващите се с история на физиката знаят отговора на този въпрос. Най-вероятно – от естетични съображения. Все пак наистина видът (1) на неговите уравнения е наистина елегантен!