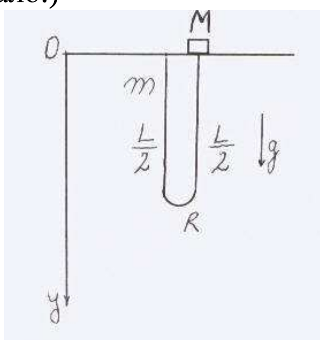
Бънджи-скок – "свободно" падане с ускорение $a > g$

Бънджи-скоковете са екстремен спорт, придобил популярност и у нас през последните десетилетия. Скоро след появата му американски учител по физика заснема на филм бънджи-скок. По кадрите от лентата анализира числено движението и с учудване констатира, че преди еластичното въже да започне да се разтяга, ускорението на човека е по-голямо от ускорението на свободното падане[1].

На физиката на бънджи-скоковете са посветени много публикации, които с различна степен на опростяване разглеждат явлението и в частност – търсят причината за отбелязания на пръв поглед странен факт. На него е посветено и следващото разглеждане.

Фиг. 1 показва ситуацията преди скока: единият край на еластично въже с маса m и дължина L е закрепен неподвижно (за перилата на висок мост, за стрелата на строителен кран и пр.), а другият край по подходящ начин е свързан с човека, чиято маса означаваме с M. За удобство посоката на вертикалната ос Oy на координатната система е избрана надолу. В резултат гравитационната потенциална енергия E_p на тяло с маса m и ордината y се оказва не mgy, а $E_p = -mgy$ (g – ускорението на свободно падане и приемаме, че $E_p = 0$ на равнището на координатното начало.)



Фиг. 1.

В хода на бънджи-скока различаваме три фази:

– *първа фаза*: от началото на падането до момента, в който дължината на частта от въжето под човека, стане нула;

– *втора фаза*: от края на първата фаза, до момента, в който падането на човека спре;

– *трета фаза*: затихващи осцилации, при които под влияние на дисипативните сили (съпротивление на въздуха и др.) кинетичната енергия на системата става нула.

Предмет на разглеждане тук е само първата фаза, защото тъкмо в нея се наблюдава падане с ускорение a, по-голямо от ускорението на свободното падане. Освен това случаят предоставя рядката възможност за демонстриране ползата от модификацията на втория принцип на Нютон, според която *импулсът на силата е равен на промяната на количеството на движение*.

Най-опростените разглеждания на динамиката на бънджи-скоковете пренебрегват масата на въжето спрямо масата на човека ($m \ll M$). В това приближение неравенството $a > g$ не може да се обясни. Едно основаващо се само на закона за запазване на механичната енергия доказателство на това неравенство може да се намери напр. в[2], но то не разкрива зависимостта на a от y.

---

[1] Този факт навремето бе отбелязан и в списание *Физика*.

[2] **Попов Хр.** *53 + 15 решени физични задачи*, С., Просвета, 2000, с. 27.

На **качествено** равнище фактът, че през първата фаза $a > g$ и следователно – че падането не е свободно, може да се обясни със следните разсъждения. Във всеки малък интервал време от полета участък от въжето, намиращ се **под** човека преминава към частта, намираща се под неподвижния край на въжето. Преди преминаването този участък е имал насочена надолу скорост. След преминаването той става неподвижен, което показва, че му е действала сила, насочена **нагоре**. Именно противодействието (по третия принцип на Нютон) на тази сила, което е насочено **надолу**, се добавя към силата на тежестта и придава допълнително ускорение на човека.

Количественото разглеждане ще направим следните опростяващи предположения:

– триенето и въздушното съпротивление се пренебрегват;

– радиусът на кривината на въжето в участъка, който свързва вертикалните части, е малък спрямо дължините на последните;

– удълженията на двете части на въжето преди началото на скока, предизвикани от техните собствени сили на тежестта, са толкова малки, че запасената в началото енергия, дължаща се на силите на еластичност, може да не се отчита.

Намиране на скоростта

Фиг. 2 показва момент от първата фаза на падането, със съответни означения за положенията, скоростите и ускоренията на човека и най-ниската част от въжето. Всички величини се разглеждат като функции на разстоянието y, изминато от човека. От съществено значение по-нататък е фактът, че когато ординатата на човека е y, ординатата на най-ниския участък от въжето е $\frac{1}{2}(L+y)$. Оттук следва, че за времето, за което човекът се спусне надолу с Δy, дъговидният участък на въжето ще се спусне с $\Delta y/2$. Затова, **когато скоростта на човека е v, скоростта на този участък е само $v/2$**.

Фиг. 2.

Скоростта v на човека в момента, когато е изминал разстояние y, определяме от закона за запазване на механичната енергия за системата човек–въже:

(1) $$E_{k0} + E_{p0} = E_k(y) + E_p(y),$$

където E_{k0} и E_{p0} са кинетичната и гравитационната потенциална енергия на системата преди началото на скока, а $E_k(y)$ и $E_p(y)$ – съответните величини в момента, когато човекът се е отдалечил на разстояние y от началното си местоположение.

Очевидно е, че:

(2) $$E_{k0} = 0,$$

а тъй като в началото центърът на масите на въжето е на разстояние $L/4$ под оста Ox, началната потенциална енергия на системата е:

(3) $$E_{p0} = -mgL/4.$$

Като означим с ρ = m/L линейната плътност на въжето (масата на единица от нейната дължина), за кинетичната енергия на системата като функция на y имаме израза:

(4) $$E_k(y) = \frac{\rho}{2}\left(\frac{L-y}{2}\right)v^2 + \frac{1}{2}Mv^2,$$

като първият член в дясната страна отчита кинетичната енергия на въжето под човека, а вторият – кинетичната енергия на самия човек. (В съответствие с предположението, че радиусът на кривината на дъговидната част на въжето е малък, не отчитаме нито кинетичната, нито потенциалната енергия на този участък.)

Тъй като центърът на масите на неподвижната част от въжето е на разстояние $\frac{1}{2}\frac{L+y}{2}$ от нулевото равнище, а на подвижната част – на разстояние $\left(y+\frac{1}{2}\frac{L-y}{2}\right)$, в същия момент гравитационната потенциална енергия на системата е:

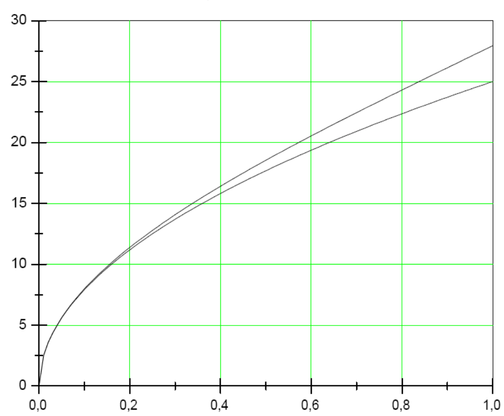
(5) $$E_p = -\left[\rho\frac{L+y}{2}\right]g\left[\frac{1}{2}\frac{L+y}{2}\right] - \left[\rho\frac{L-y}{2}\right]g\left[y+\frac{1}{2}\frac{L-y}{2}\right] - Mgy\,.$$

След заместване на изразите (2), (3), (4) и (5) в (1) и решаване на полученото уравнение спрямо v^2, получаваме:

(6) $$v^2 = gy\frac{4ML+2mL-my}{2ML+mL-my} = 2gy\frac{2+\frac{m}{M}\left(1-\frac{1}{2}\frac{y}{L}\right)}{2+\frac{m}{M}\left(1-\frac{y}{L}\right)}\,.$$

Тъй като дробта в дясната страна на (6) е по-голяма от единица, вижда се, че скоростта на човека е по-голяма от скоростта $v_0 = \sqrt{2gy}$, която би придобил, падайки **свободно** от същата височина y. Това вече е достатъчно, за да твърдим, че ускорението a през първата фаза на бънджи-скока е по-голямо от g.

Нека разгледаме две следствия от формула (6). Лесно се проверява, че в граничния случай, когато масите на човека и въжето са равни ($m = M$), в края на първата фаза на скока ($y = L$) скоростта на човека е с почти 12 % по-голяма от v_0 – скоростта на истинското свободно падане. На фиг. 3 за този случай са показани графиките на v и v_0 при v_0 = 25 m/s като функции на безразмерния параметър y/L.



Фиг. 3.

Много по-интересен извод следва в друг екстремен случай – когато падащият край на въжето е свободен (т.е. M = 0). В този случай от (6) следва $v \to \infty$, т.е. в момента, когато последният участък на падащата половина на въжето преминава в състояние на покой, неговата вертикална скорост расте неограничено! Този ефект е познат отдавна. Използват го циркови дресьори на животни, кочияши и пр. Когато замахват с пръчката на камшика, другият й край описва някаква траектория с крайна скорост, докато свободният край на самия камшик достига свръхзвукови скорости, благодарение на което се чува характерното изплющяване, дължащо се на създадената въздушна ударна вълна. (Същият ефект има и преминаването на свръхзвуков самолет.)

По-нататък, за да определим зависимостта на ускорението a от положението на човека (т.е. – от y), трябва да направим по-детайлни разглеждания.

Намиране на ускорението – математика

За тези, които владеят елементи от висшата математика, формула (6) предлага удобен начин за намиране на ускорението a – достатъчно е да я диференцираме по времето:

$$2v\frac{dv}{dt}=\left\{\frac{d}{dy}\left[2gy\frac{2+\frac{m}{M}\left(1-\frac{y}{2L}\right)}{2+\frac{m}{M}\left(1-\frac{y}{L}\right)}\right]\right\}\frac{dy}{dt}.$$

Като отчетем, че $\frac{dv}{dt}=a$, $\frac{dy}{dt}=v$ и съкратим на $2v$, получаваме:

$$a=g\frac{d}{dy}\left[y\frac{2+\frac{m}{M}\left(1-\frac{y}{2L}\right)}{2+\frac{m}{M}\left(1-\frac{y}{L}\right)}\right].$$

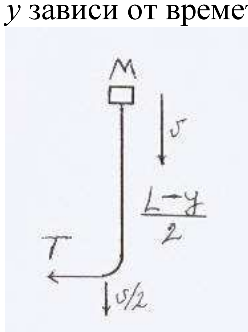
Пресмятането на производната е въпрос на математична ловкост, но полученият израз не дава възможност за съдържателен от физична гледна точка коментар, поради което не го привеждаме. Не е трудно да се провери, че производната е по-голяма от единица, т.е. наистина $a > g$.

Намиране на ускорението – физика

Зависимостта на a от y може да се получи с помощта на несложни физични съображения, които, освен това, водят до резултат с по-прозрачна структура. За целта разглеждаме подсистемата от фиг. 4. Нейната маса m':

(7) $$m'=M+\rho\frac{L-y}{2}$$

е променлива, тъй като посредством y зависи от времето t.



Фиг. 4.

Съществено в случая е, че в най-ниската част от прегъвката на въжето силата на опън T е хоризонтална и затова фактът, че не е известна, не пречи за прилагане на втория принцип на Нютон при разглеждане на вертикалните движения.

След време Δt малък елемент от падащата със скорост v част на въжето преминава в хоризонтално положение. Неговата маса $\Delta m'$ намаление намираме от равенство (7):

(10) $$\Delta m' = \Delta\left(M + \rho\frac{L-y}{2}\right) = -\frac{\rho}{2}\Delta y = -\frac{\rho}{2}v\Delta t\,.$$

В началото на интервала Δt вертикалната скорост на елемента е v, а в края му, когато той вече е заел хоризонтално положение, вертикалната му скорост е само $v/2$. Това означава, че за време Δt му е действала насочена **нагоре** сила с големина F', която е променила неговото количество на движение с:

(11) $$\Delta p = \left|\Delta m'\right|\frac{v}{2}\,.$$

Съгласно с втория принцип на Нютон обаче, тази промяна трябва да бъде равна на импулса на силата $F'\Delta t$, т.е.:

$$F'\Delta t = \left|m'\right|\frac{v}{2}\,,$$

откъдето с помощта на (10) за големината на силата получаваме:

(12) $$F' = \frac{\left|\Delta m'\right|}{\Delta t}\frac{v}{2} = \left(\frac{\rho}{2}v\right)\frac{v}{2} = \frac{\rho}{4}v^2\,.$$

Силата F' е вътрешна сила за разглежданата подсистема, защото е резултат от взаимодействията между нейните две части – вертикалната и тази, която е станала хоризонтална. Според третия принцип на Нютон същата по големина сила, но насочена **надолу**, трябва да действа и на вертикалната част, чиято маса се описва с равенство (7). Именно тази насочена надолу сила придава на човека допълнително ускорение a', което се определя от втория принцип на Нютон:

(13) $$F' = \frac{\rho}{4}v^2 = m'a' = \left(M + \rho\frac{L-y}{2}\right)a'\,,$$

или:

(14) $$a' = \frac{\frac{\rho}{4}v^2}{M + \rho\frac{L-y}{2}}\,.$$

Пълното ускорение на човека получаваме като към ускорението на свободното падане прибавим допълнителното ускорение a':

(15) $$a = g + \frac{\frac{\rho}{4}v^2}{M + \rho\frac{L-y}{2}}\,.$$

Ако в тази формула заместим v^2 от (6) и отчетем, че $\rho = \frac{m}{L}$, получаваме търсената зависимост на ускорението от изминатия от човека път:

(16) $$a = g\left[1 + my\frac{2ML + mL - \frac{1}{2}my}{(2ML + mL - m)^2}\right].$$

По същество този резултат съвпада с публикувания на адрес http://www.real-world-physics-problems.com/physics-of-bungee-jumping.html .

Лесно се проверява, че ако масите на човека и въжето са равни ($m = M$), в края на първата фаза от скока (т.е. при $y = L$), ускорението на човека е $a \approx 1{,}6g$. Това е едно превишение, което със сигурност може да се констатира чрез анализ на кадри от кинолента, на която е записан скокът – както е направил споменатият в началото американски учител.

Коментари.

1. Получените резултати не зависят от коефициента на еластичност на въжето. Това е резултат от пренебрегването на началното удължение на двете половини на въжето от собствената му тежест преди скока. В това отношение задачата предоставя възможност за последователно проследяване влиянието на различни опростяващи предположения. След като отчетохме влиянието на масата на въжето, можем да направим следващата стъпка, която ще ни доближи още повече към действителността, като отчетем и коефициента на неговата еластичност. Това ще даде възможност за сравняване влиянието на различните фактори (маса, дължина и коефициент на еластичност и т.н.).

За отчитане удължението, дължащо се на собствената тежест на въжето може да помогне резултатът от файла I chast\5 razni\02 masivna prujina, където е показано, че удължението на еластична нишка под влияние на собствената й тежест е половината от това, което би се получило, ако цялата маса на нишката е съсредоточено в долния й край.

2. Приведените разсъждения осигуряват коректно **описание** на явлението, но не го **обясняват** – те не разкриват механизма на пораждане на силата F', от която зависи допълнителното ускорение. За да се обясни нейната поява са необходими по-детайлни разглеждания.

3. Ако решим равенство (6) спрямо скоростта и отчетем, че $v = \frac{dy}{dt}$, за y получаваме обикновено диференциално уравнение от първи ред с разделящи се променливи, интегрирането на което води до равенството:

(17) $$\sqrt{2g}\,t = \int_0^y \sqrt{\frac{1}{y}\frac{2ML + mL - my}{2ML + mL - \frac{m}{2}y}}\,dy .$$

По същество това равенство задава в неявна форма закона за движение $y = y(t)$. Начинът за решаване на интеграла е въпрос на избор от страна на интересуващите се, но резултатът винаги позволява построяване на графиката на функцията $y = y(t)$ и сравняването й с графиката на пътя при свободното падане ($y = \frac{1}{2}gt^2$).