Тежко тяло – леко тяло

Сред разнообразните движения едни от най-често обсъжданите са движенията на тела под действие на силата на тежестта и на съпротивлението F на въздуха в близост до земната повърхност. Когато далечината на полета е малка в сравнение със земния радиус, тежестта придава на всички тела едно и също ускорение g = const, насочено надолу. Съпротивлението на въздуха зависи от скоростта v на тялото, от напречното му сечение S, от формата на тялото и от плътността ρ на самия въздух. Важно в случая е, че съпротивлението на въздуха **не** зависи от масата M на движещото се тяло. Ускорението a обаче, което силата на съпротивление предава на тялото, съгласно с втория закон на Нютон ($a = \dfrac{F}{M}$), разбира се, зависи от тази маса.

Ясно е, че от съотношението между двете ускорения (a и g) зависи дали при дадено конкретно движение съпротивлението на въздуха може, или не може да се пренебрегне. Условието $a << g$ гарантира, че съпротивлението може да се пренебрегне, но като критерий за решаване на практически проблеми то е неудобно, защото обикновено ускорението a е неизвестно. Ето защо ще потърсим друг, по-удобен критерий.

Формулата $a = \dfrac{F}{M}$ показва, че при равни други условия съпротивлението на въздуха влияе на движението толкова по-слабо, колкото по-голяма е масата M на тялото. Жаргонният израз на този факт е: *колкото по-тежко е едно тяло, толкова по-слабо влияе съпротивлението на въздуха върху движението му*. Разбира се, вярно е и обратното: колкото по-леко е едно тяло, толкова повече движението му зависи от въздушното съпротивление.

Целият проблем се свежда до това: кога, при какво условие в даден конкретен случай едно тяло можем да смятаме *тежко* и да пренебрегваме въздушното съпротивление, и кога трябва да го смятаме *леко* и да отчитаме съпротивлението. Защото е очевидно, че едно и също тяло в едни случаи може да се смята достатъчно тежко, а в други това приближение да е необосновано. Елементарен пример са движенията на куршум с маса M = 9 g. Ако изучавате движението му, когато сте го пуснали от височина 1–2 m, ще установите, че с голяма точност то представлява свободно падане, т.е. съпротивлението на въздуха е пренебрежимо малко. В този случай куршумът е достатъчно *тежко* тяло. Ако обаче изстреляте същия куршум и искате да опишете траекторията му, след като е прелетял стотици метри, ще установите, че тя не е парабола, т.е. в този случай куршумът вече не се държи като *тежко* тяло и съпротивлението на въздуха не може да се пренебрегне.

Решението на този проблем ще търсим с помощта на *метода на размерностите*. Това означава, че като използваме величините, които характеризират интересуващото ни движение, чрез тях ще конструираме величина с размерност на маса – някаква характеристична маса M_0, с която да сравняваме масата на тялото и да решаваме дали можем да го смятаме за тежко (и да пренебрегваме съпротивлението на въздуха).

Величините, с които разполагаме за целта, са: скоростта v на движението, която се измерва в m/s, напречното сечение S на тялото, което се измерва в m^2 и плътността на въздуха ρ, която се измерва в kg/m^3. Щом търсим комбинация с размерност на маса, от тази тройка трябва да изключим скоростта, защото само нейната размерност съдържа времето, така че то няма как да се елиминира чрез множители, представляващи степени на S и на ρ. От S и ρ лесно може да се конструира величина с размерност на маса, но за целта е необходима още някаква характеристика на движението с размерност на дължина (защото $[\rho S] = \dfrac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}.\mathrm{m}^2 = \dfrac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}}$).

За да съобразим коя величина може да използваме, ще се върнем към двата случая на движение на куршума, за които вече знаем, че в единия съпротивлението на въздуха може, а в другия – не може да се пренебрегне. Коя е съществената разлика между тях (скоростта изключваме по гореспоменатата причина)? Разликата е в дължината на траекторията – в единия случай 1–2 метра, в другия – стотици метри. Това подсказва, че като величина, която се измерва с метри, можем да използваме дължината L на траекторията. С нейна помощ конструираме величината:

(1) $$M_0 = \rho L S\ ,$$

която има желаната размерност на маса и може да се използва като характеристична маса за всеки конкретен случай. Интересно е, че M_0 има много нагледен смисъл: тъй като LS представлява обем на цилиндрична тръба, чиято ос съвпада с траекторията, напречното й сечение е S, а дължината – L, то ρLS е просто масата на въздуха, изпълващ тази тръба.

По този начин търсеният критерий придобива вида:

При движение във въздух едно тяло с маса M може да се смята тежко и съпротивлението на въздуха – да се пренебрегне, ако масата на тялото е достатъчно по-голяма от масата M_0 на въздуха в мислената тръба, по която минава тялото.

Важно е да се подчертае, че **не сме доказали** валидността на този критерий! Ние обаче ще проверим действието му в случая с куршума, след което ще го приложим и за някои случаи, срещани в различни спортове. Понеже не ни интересуват точни числа, а само оценки, във всички случаи ще смятаме, че плътността на въздуха е $\rho = 1\dfrac{\text{kg}}{\text{m}^3}$.

Примерът с куршума. Ако куршумът е от оръжие с калибър 7,62, т.е. диаметърът му е 7,62 mm, напречното му сечение е $S = \dfrac{\pi d^2}{4} \approx 45{,}6.10^{-6}\ \text{m}^2$. В първия случай, когато пускаме куршума да пада от височина примерно $L = 2$ m, характеристичната маса е $M_0 = \rho L S \approx 91.10^{-6}$ kg. Тъй като приехме, че масата на самия куршум е $M = 9$ g $= 9.10^{-3}$ kg, то отношението между масата на тялото и характеристичната маса има стой-ност $\dfrac{M}{M_0} = \dfrac{9.10^{-3}}{91.10^{-6}} \approx 100$. Тази стойност показва, че ако смятаме в случая куршума за *достатъчно тежък* и пренебрегнем съпротивлението на въздуха, грешката, която ще получим няма да надминава 1 %.

Във втория случай, ако приемем, че дължината на траекторията е $L = 200$ m, т.е. 100 пъти по-голяма, за отношението между двете маси намираме $\dfrac{M}{M_0} \approx 1$, и според формулирания по-горе критерий куршумът вече не може да се разглежда като *тежко тяло*.

Други примери. Интересни примери може да се подберат измежду различните спортове. По-долу привеждаме резултатите от приложението на критерия за някои случаи.

Голф. Масата на топчето за голф е 46 g, а радиусът му – 2,1 cm. При дължина на траекторията 150 m пресметнатата по приведената по-горе формула характеристична маса е 300 g, т.е. по-голяма от масата на тялото, което означава, че в този случай съпротивлението на въздуха със сигурност трябва да се отчита. (Тъкмо заради необходимостта от намаляване на това съпротивление повърхността на топчето не е гладка, а плътно осеяна с малки вдлъбнатини.)

Тенис. Масата на топката за тенис е 57 g, а радиусът й – 3,3 cm. При далечина на полета 40 m характеристичната маса е 200 g, т.е. – по-голяма от масата на топката, така че и в този случай съпротивлението на въздуха не може да се пренебрегне.

Тенис на маса. Масата на топчето в случая е 2,7 g, а радиусът му – 2,0 cm. При дължина на траекторията 4 m характеристичната маса е 6 g, т.е. и в този случай е по-голяма от масата на тялото. Следователно отново съпротивлението на въздуха не може да се пренебрегне.

Баскетбол. Масата на баскетболната топка е 600 g, а радиусът й – 12 cm. При дължина на траекторията от 5 m за характеристичната маса получаваме стойност 300 g. В този случай вече масата на тялото е по-голяма от характеристичната маса, но я превишава само два пъти, което показва, че грешката, която бихме направили, ако пренебрегнем съпротивлението на въздуха, няма да е малка.

Тласкане гюле. Жените тласкат гюле с маса 4 kg и радиус 10 cm. При далечина на полета 20 m за характеристичната маса получаваме 800 g. Това вече е 5 пъти по-малко от масата на тялото, така че в този случай би било най-оправдано, ако приемем, че гюлето е достатъчно тежко и пренебрегнем съпротивлението на въздуха.