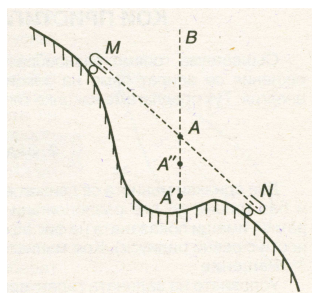


Съдържание

1. Стрелба с две оръдия	3
2. Кой пристига първи – 1	4
3. Кой пристига първи – 2	5
4. Ускорение на отскачаща топка	6
5. Скорост на хоккейна шайба	8
6. Време за издигане – време за падане	8
7. Време за издигане – без и със съпротивление	9
8. Влак на ужасите	11
9. Отново маниста, но пристигат едновременно	11
10. Полет във ветровито време	13
11. Басейн, лодка, камък.....	13
12. Земята пада върху Слънцето	14
13. Ефективно проветряване	15
14. Взаимодействие на точков заряд със заредена метална сфера	16
15. Надолу и нагоре по наклонена равнина с триене	18
16. Сила с постоянна големина и сила с постоянна мощност	19
17. Конвекция във велосипедна гума	21
18. Тухла пада върху асансьор	22
19. Накъде ще тръгне колелото?	24
20. Мехурчето на либелата	25
21. Падаща тухла отскача от каучуково топче	26
22. Архимед, но и Паскал!	27
23. Отново – кой пристига пръв?	28
24. Чаша с вода – една класическа задача	30
25. Потенциометрично или чрез предсъпротивление?	31
26. Движение по наклонена равнина	32
27. Кой пристига с по-голяма скорост	33
28. Лов на маймуни	35
29. Център на масите на верижка и на пръчки	36
30. Надпревара на бутилки	36
31. Принцип на непрекъснатостта	37
32. Никаква физика	38

Стрелба с две оръдия

1. Задача. Две насочени едно срещу друго оръдия M и N се намират върху склон с профил, показан на фиг. 1. Осите на оръдейните дула лежат върху правата MN . Оръдията стрелят и снарядите им се срещат върху вертикалната права AB , която разполовява отсечката MN . Необходимо ли е за осъществяване на подобна среща: а) началните скорости на двата снаряда да бъдат равни по големина; б) изстрелите да се произведат едновременно?



Фиг. 1.

Анализ. Задачата, разбира се, може да се реши аналитично. Тя допуска обаче и качествени решения, при което дори не е необходимо да се използва законът за пътя при равноускорително движение. Достатъчно е да се знае, че: 1) когато едно тяло участва едновременно в две движения, общото му преместване е сума (векторна!) от преместванията, които би имало, ако извършва движенията едно след друго; 2) колкото по-дълго време пада едно тяло, толкова по-голямо разстояние във вертикално направление изминава то.

Решение

Първо ще покажем, че описаната в условието среща се осъществява, ако оръдията стрелят едновременно и големината v на двете начални скорости е една и съща.

Всеки снаряд участва в две движения: равномерно движение със скорост v по направление на правата MN и свободно падане. Ако нямаше свободното падане, те биха достигнали едновременно т. A – средата на отсечката MN (фиг. 1). И тъй като интервалът време t , през който са се движили, е един и същ, еднакви ще бъдат и разстоянията AA' , които снарядите ще изминат във вертикално направление при свободното си падане. Следователно в този случай снарядите наистина ще се срещнат в определена точка A' от вертикалната права AB .

Да разгледаме втори случай: снарядът от т. M се изстрелва със същата скорост v и затова след същото време t попада отново в т. A' . Вторият снаряд обаче се изстрелва от т. N със скорост $v' > v$. Ако се изстреля едновременно с първия, той ще достигне правата AB по-рано и снарядите ще се разминат. За да достигнат снарядите правата AB едновременно, е необходимо вторият да се изстреля по-късно. При това положение обаче той ще пада по-кратко време и преместването му във вертикално направление ще бъде по-малко от AA' – вторият снаряд ще попадне в т. A'' и срещата не се осъществява.

Третият възможен случай – когато скоростта на втория снаряд е по-малка от тази на първия, се разглежда по аналогичен начин. В този случай вторият снаряд пресича правата AA' в точка, която лежи по-ниско от т. A' .

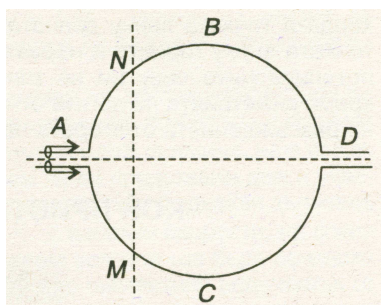
И така, отговорът и на двата въпроса е утвърдителен: снарядите могат да се срещнат върху правата AA' само ако са изстреляни едновременно, и то с равни по големина начални скорости.

Коментар. Привидно задачата има решение при всяка стойност на началната скорост на снарядите. В реалния случай тази скорост трябва да бъде достатъчно голяма, така че снарядите да не паднат върху склона преди да са достигнали правата AA' . Минималната възможна стойност на v зависи, разбира се, от конкретния профил на терена.

Кой пристига първи – 1

Съществува голямо разнообразие от качествени задачи, чиито решения се опират само на закона за запазване на механичната енергия. Тук предлагаме няколко типични примера за подобни задачи.

2. Задача. Две еднакви маниста се движат едновременно с еднакви скорости и без триене по две разположени във вертикална равнина телени рамки, имащи показаната на фиг. 2 форма (ABD и ACD са полуокръжности с равни радиуси). Кое манисто ще достигне първо т. D ?



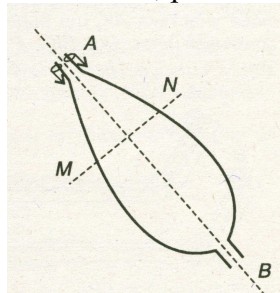
Фиг. 2.

Решение

Условието на задачата гарантира запазване на пълната механична енергия на всяко от манистата. Ако M и N са две точки, лежащи на вертикална права, манистото в т. M ще има по-малка потенциална енергия, отколкото манистото в т. N (независимо от това дали манистата минават през тези точки едновременно, или не минават). Тъй като във всеки момент механичните енергии на двете маниста са равни, и кинетичната енергия, и скоростта на манистото в т. M ще бъдат по-големи от съответните величини за горното манисто, когато то минава през т. N . Двете еднакви дъги ABD и ACD могат да бъдат разделени на голям брой намиращи се един над друг **еднакви** малки участъци, за всеки от които е валидно направеното по-горе разсъждение. Следователно манистото, което се движи по дъгата ACD , ще измине пътя си по-бързо.

Коментар. Приведеното решение съдържа два възлови момента. Първият е използването на закона за запазване на механичната енергия при извода, че скоростта на манистото, което минава през разположената по-ниско точка, в тази точка е по-голяма от скоростта на манистото, минаващо през по-високо разположената точка. Вторият момент включва използването на симетрията на двете криви. Въз основа на него се заключава, че времето, за изминаване на елементарната дъгичка, съдържаща т. M , е по-малко от времето за изминаване на същата по дължина дъгичка през т. N .

Вариант. Вариант на тази задача се получава, ако двете маниста се пуснат с равни начални скорости по две еднакви дъги, разположени във вертикална равнина,

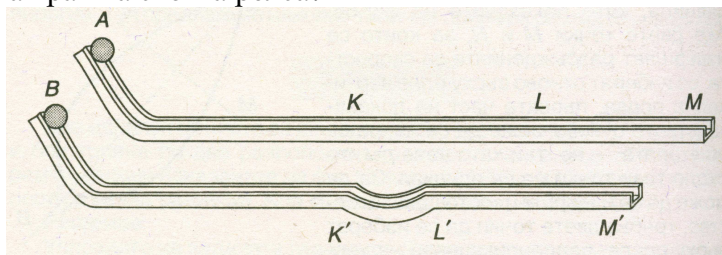


Фиг. 3.

като показаните на фиг. 3. Ако двете точки M и N , за които се извършват разсъжденията за скоростта, се изберат отново върху една вертикална права, първата част на доказателството отново може да се направи, но втората – не, тъй като вече дъгите около тези точки не са еднакви. За да може да се извърши цялото доказателство, трябва двете точки да се изберат върху права, перпендикулярна на хордата AB на дъгите. Поради наклона на хордата точката върху долната дъга се намира винаги по-ниско от точката върху горната и първата част на разсъжденията, засягаща потенциалните енергии на манистата, остават валидни. В същото време симетрията на дъгите относно хордата гарантира валидността на разсъжденията от втората част на решението на задачата.

Кой пристига първи – 2

3. Задача. Две еднакви топчета A и B тръгват едновременно без начална скорост от единия край на две релси с еднаква дължина и почти еднаква форма (фиг. 4) – участък от едната релса е вдлъбнат надолу, а на съответното място другата релса е права. Триенето при търкаляне и съпротивлението на въздуха се пренебрегват. Кое от топчетата първо достига края на своята релса?



Фиг. 4.

Решение

Нека т. K от правата релса отстои на същото разстояние от началото ѝ, на каквото точка K' , в която започва извивката на другата релса, отстои от нейното начало. Според условието на задачата двете топчета ще достигнат едновременно и с еднакви скорости съответно т. K и т. K' . Ако подберем т. L от правата релса така, че дължината на участъка KL да бъде равна на дължината на огънатия участък $K'L'$, дължините на участъците LM и $L'M'$ също ще бъдат равни.

При това положение очевидно времето, за което топчето A изминава участъка AK ще бъде равно на времето, за което топчето B изминава участъка BK' . Равни ще бъдат и времената, за които топчетата изминават участъците LM и $L'M'$, защото от закона за запазване на механичната енергия следва, че по тях топчетата ще се движат с еднакви скорости.

По такъв начин намирането отговор на поставения въпрос се свежда до определяне кой участък се изминава по-бързо – правият участък KL или участъкът $K'L'$, който има същата дължина, но е извит. За да решим този въпрос, можем да си представим двата участъка разделени на равен брой малки подучастъци с еднакви дължини. Топчетата достигат т. K и т. K' с еднакви скорости. На всеки подучастък от правата релса обаче скоростта на топчето е по-малка от скоростта на топчето, което се движи по огънатата релса, тъй като този подучастък се намира по-ниско и там потенциалната енергия на топчето е по-малка, а кинетичната – съответно по-голяма. Щом скоростта по участъка KL е по-малка, а дължините на участъците – равни, то времето за изминаване на KL ще бъде по-голямо от времето за изминаване на $K'L'$.

И така, топчето, което се движи по кривата релса, ще достигне края ѝ, преди другото топче да достигне края на правата релса.

Ускорение на отскачаща топка

Съществува един тип задачи, в които се разглежда движение на тяло в среда, която му оказва съпротивление. Равнодействащата на силите, действащи по посока на скоростта, обикновено се нарича **движеща сила**, за разлика от **силата на съпротивление**, чиято посока е противоположна на посоката на скоростта, а големината ѝ зависи от големината на скоростта. Във въпросния тип задачи се използват два факта:

1. Когато движението е равномерно, движещата сила и силата на съпротивление са равни по големина. В този случай движещата сила определя не ускорението (както изисква вторият принцип на динамиката), а скоростта на тялото.

2. Силата на съпротивление не зависи от това действа или не движеща сила.

4. **Задача.** От летящ самолет е пусната баскетболна топка. Колко е ускорението на топката в момента, когато тя отскача от земната повърхнина? (Приемете, че ударът е еластичен.)

Решение

След пускане на топката ускорителното ѝ движение продължава, докато нарастващата заедно със скоростта сила на съпротивление на въздуха се изравни по големина с действащата на топката сила на тежестта. През това време топката изминава няколко стотици метри, след което падането ѝ продължава **равномерно**. Следователно в момента преди удара силата на тежестта (движеща сила в случая) е равна по големина на съпротивлението на въздуха. Тъй като ударът е еластичен, след него скоростта на топката (нагоре!) е същата по големина, от където следва, че и съпротивлението на въздуха ще бъде същото, но посоката му ще бъде **надолу**. Следователно в момента **след** удара на топката действат две насочени надолу сили – силата на тежестта mg и съпротивлението на въздуха с големина също mg . Общата сила е $2mg$, а търсеното ускорение на топката – $2g$, насочено надолу.

Варианти. 1. Същата задача се среща и в следния вариант:

Топче за пинг-понг е пуснато от голяма височина и достига земната повърхност с постоянна скорост v , след което е хвърлено нагоре със скорост, по-голяма от v . Колко е ускорението на топчето в момента, когато скоростта му стане равна на v ?

Очевидно е, че отговорът е същият, както преди.

2. А ето и "термодинамичния" аналог на задачата:

За да възварите в затворен съд вода с маса m използвате нагревател с мощност P . След известно време констатираме, че мощността на нагревателя е недостатъчна и водата изобщо не завира. Колко време след изключване на нагревателя температурата на водата ще се понижи с $\Delta T = 1^\circ\text{C}$?

За да решим задачата е достатъчно да съобразим, че щом водата не възвира, от даден момент нататък температурата ѝ остава постоянна, тъй като отделеното в нея за единица време количество топлина P е равно на количеството топлина, което се отдава на околната среда. Това "изгубено" количество топлина обаче не зависи от работата на нагревателя. Следователно след изключването му за време t водата ще изгуби количество топлина Pt . Ако с C означим специфичния топлинен капацитет на водата, законът за запазване на енергията осигурява равенството $Pt = Cm\Delta T$, от което за търсения интервал време намираме:

$$t = Cm\Delta T/P.$$

Тъй като за водата $C = 4200 \text{ J/(kg}\cdot\text{K)}$, ако масата ѝ е $m = 2 \text{ kg}$, а мощността на нагревател – $P = 200 \text{ W}$, след изключването му температурата ще се понижи с един градус за 42 s.

Разбира се, проведените разсъждения са валидни само в случай, че ΔT е достатъчно малко, за да може да се смята че скоростта на отдаване на количество топлина на околната среда е постоянна. С изстиването на водата тази скорост намалява, така че и понижението на температурата ще се забавя.

Аналогията между тази задача и задачата за топката, която пада от самолет е очевидна: в единия случай скоростта на падане е постоянна поради равенство на големините на две сили с противоположни посоки (силата на тежестта и силата на съпротивление от страна на въздуха), а в други – температурата на водата е постоянна поради равенство между количеството топлина, отделена от нагревателя и топлината, отдадена на околната среда. В единия случай решението се намира благодарение на това, че големината на силата на съпротивление зависи само от големината, но не и от посоката на скоростта, а в други – че отдаденото на околната среда количество топлина за единица време зависи само от температурата, но не и от това дали нагревателят работи или не.

Тема за размисъл. Бихме ли могли чрез данните, с които разполагаме, да определим времето, за което водата ще изстине с $30\text{ }^{\circ}\text{C}$? В каква посока би била грешката, която бихме допуснали, ако разсъждаваме както по-горе, т.е. дали пресметнатото по същия начин време би било по-голямо, или по-малко от действителното?

Скорост на хоккейна шайба

5. Задача. С каква скорост излита неподвижна хоккейна шайба, ако в момента на удара скоростта на стика, с който я удря хокеистът, е v ?

Решение

При решаване на задачата трябва да се отчита, че масата на шайбата е пренебрежимо малка спрямо сумата от масата на стика и на хокеиста, който държи стика. Най-лесно отговор на поставения въпрос се получава, ако движенията се разгледат спрямо отправна система, която се движи заедно със стика. В тази система стикът е неподвижен, а шайбата се движи към него със скорост v . Поради указаното съотношение между масите, ударът е като в неподвижна стена и следователно шайбата ще смени посоката на скоростта си на противоположната, а големината ѝ ще се запази. Щом спрямо подвижната система скоростта е v и е еднопосочна с движението на стика, спрямо неподвижната отправна система (леда) скоростта на шайбата ще бъде $2v$.

Време за издигане – време за падане

6. Задача. Снаряд е изстрелян вертикално нагоре. Кой интервал време е по-голям – през който снарядът се издига, или през който пада? Съпротивлението на въздуха не се пренебрегва.

Анализ. Поради сложната зависимост на съпротивлението на въздуха от скоростта на снаряда, количественото решение на задачата, т.е. чрез уравнението на движение на снаряда, неизбежно налага да се използва модел, а самото решаване на уравнението е също трудна задача. Отговор на поставения въпрос обаче може да се получи с прилагане само на енергетичния подход. За целта разглеждаме механичната система

снаряд – Земя, в която действа една вътрешна сила – консервативната гравитационна сила, и една външна за системата сила – силата на съпротивление на въздуха.

Решение

По определение нарастването на механичната енергия на една система, в която действат консервативни вътрешни сили, е равна на работата на външните сили (независимо от това, дали са консервативни или не са), действащи върху телата от системата. От това определение за затворени системи следва законът за запазване на механичната енергия.

В нашия случай системата се състои от един снаряд и затова всички сили, които му действат, са *външни сили*. Първата част на решението включва факта, че независимо от посоката на движението му (нагоре или надолу), силата на съпротивление е насочена винаги противоположно на посоката на скоростта. Ето защо работата, която тя извършва, е винаги отрицателна. И тъй като силата на съпротивление е външна, нейната работа води до постоянно намаляване на механичната енергия на снаряда.

Във втората част на решението разглеждаме преминаването на снаряда през една и съща точка A , но в два различни момента – когато снарядът се издига, и когато пада. Тъй като вторият момент е по-късен, в него механичната му енергия е по-малка. Но тъй като потенциалната енергия и в двата случая е една и съща, следва да заключим, че кинетичната енергия, а оттам и скоростта на снаряда при движението му през т. A надолу, е по-малка от скоростта му в същата точка, но при полета нагоре.

Трета част на решението: щом за всяка точка от възходящата част на траекторията скоростта на снаряда е по-голяма от скоростта му в същата точка от нисходящата част, а дължините на тези две части са очевидно еднакви, времето за издигане на снаряда ще бъде по-малко от времето, за което той пада.

Време за издигане – без и със съпротивление

7. Задача. Снаряд е изстрелян вертикално нагоре. Кога интервалът време, през който снарядът се издига, е по-голям – когато съпротивлението на въздуха се отчита, или когато това съпротивление се пренебрегва.

Анализ. Този въпрос е доста по-сложен от предишния. Законът за запазване на енергията лесно води до заключението, че височината h_0 , до която се издига снарядът, когато съпротивлението на въздуха се пренебрегва, е по-голяма от височината h , до която той достига при отчитане на съпротивлението. Този закон обаче не помага за намиране съотношението между времената в двата случая. Интересно е, че отговорът все пак може да се получи на едно качествено равнище, което не зависи от това, как силата на съпротивление на въздуха зависи от скоростта. Задачата е поучителна, защото е една

от рядко срещаните качествени задачи, в решенията на които се използва величината **импулс на сила**.

Известно е, че вторият принцип на Нютон може да се запише във вида:

$$(1) \quad \Delta \vec{p} = m \Delta \vec{v} = \vec{F} \Delta t,$$

където $\vec{p} = m\vec{v}$ е импулсът на частица с маса m , която се движи със скорост $\vec{v}$, а $\vec{F}\Delta t$ е импулсът на силата, която действа върху частицата за интервала време Δt .

Решение

Ако означим с $\vec{G}$ силата на тежестта, действаща на снаряда, и пренебрегнем съпротивлението на въздуха, уравнението на движение на снаряда е:

$$(2) \quad m \Delta \vec{v} = \vec{G} \Delta t.$$

Ако проектираме това равенство върху ос, насочена вертикално нагоре, получаваме:

$$(3) \quad m \Delta v = -G \Delta t.$$

Цялото време t_0 , през което снаряда се издига, може да се раздели на малки интервали Δt и за всеки от тях да се запише равенство от типа (3). Нека сумираме тези равенства и отчетем, че m и G са постоянни. Сумата на всички Δt дава, разбира се, t_0 , а сумата на всички Δv дава в резултат $(-v)$, защото началната скорост е v , а крайната – нула. По такъв начин сумирането за случая, когато съпротивлението на въздуха не се отчита, дава резултат:

$$(4) \quad mv = Gt_0.$$

Когато съпротивлението на въздуха $\vec{F}$ се отчита, вместо (2) уравнението на движение има вида:

$$(5) \quad m \Delta \vec{v} = \vec{G} \Delta t + \vec{F} \Delta t.$$

Тъй като при издигане на снаряда и съпротивлението на въздуха е насочено надолу, проекцията на това равенство върху вертикалната ос има вида:

$$(6) \quad m \Delta v = -G \Delta t - F \Delta t.$$

Сумирайки отново равенствата от типа (6) за всички малки интервали Δt , както по-горе получаваме:

$$(7) \quad mv = -Gt - J,$$

където t е времето за издигане на снаряда, а $J > 0$ – големината на общият импулс на съпротивлението на въздуха при движението нагоре.

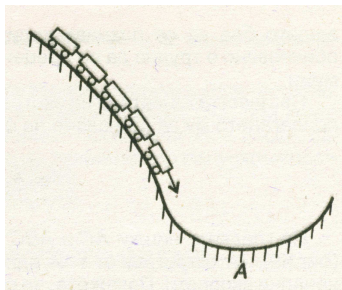
Като извадим от (7) равенство (4) и преобразуваме равенството, получаваме:

$$(8) \quad G(t_0 - t) = J > 0,$$

откъдето следва, че $t_0 > t$, т.е. **съпротивлението на въздуха намалява не само височината, но и времето за издигане на снаряда**.

Влак на ужасите

8. Задача. Посочете в кой номер вагонче трябва да седнете, така че да преминете с максимална скорост през най-ниската точка (т. *A* на фиг. 5) от траекторията на "вакчето на ужасите".



Фиг. 5.

Решение

За да се намери правилният отговор, трябва да се отчете, че:

1. Във всеки момент скоростите на всички вагончета са еднакви.
2. Дължината на влакчето е съизмерима с радиуса на кривината на траекторията в най-ниската ѝ част, т.е. влакчето не може да се разглежда като материална точка.
3. Според закона за запазване на механичната енергия скоростта на влакчето е максимална, когато потенциалната енергия на влакчето е минимална.

Потенциалната енергия на влакчето е минимална, когато центърът на тежестта му е най-ниско. Това е моментът, в който средното вагонче се намира в т. *A*. Следователно, за да премине през т. *A* с максимална скорост, човек трябва да седне във вагонче *N 3*. Ако избере вагонче *N 1*, той ще се окаже в т. *A*, преди влакчето да е достигнало максималната си скорост, а ако седи във вагонче *N 5*, той ще премине през т. *A* в момент, когато влакчето вече е загубило част от скоростта си.

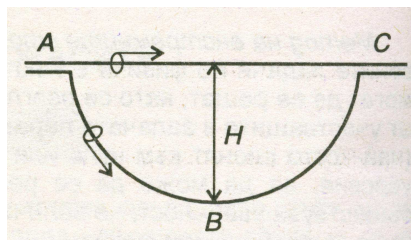
Коментар. Тези разсъждения са валидни дотолкова, доколкото масата на човека се смята пренебрежимо малка спрямо масата на вагончето. При друго съотношение между масите може да се окаже, че отговорът е друг.

Отново маниста, но пристигат едновременно

Метод на екстремните стойности. Разнообразието на качествените задачи по физика е изключително голямо. Една част от тях могат да се решат, като се разглеждат частни случаи, в които някои от участващите в задачата параметри приемат екстремни стойности (най-често клонят към нула или растат неограничено). Необходимо условие, за да може да се реши задачата по този начин, е да съществува увереност, че величината, чието поведение се обсъжда, няма минимума или максимуми в интервала от допустимите за нея стойности. Това е и рисковият момент при прилагането на този метод, защото без да се познава количественото решение на задачата, обикновено е трудно да се прецени има, или няма минимума и максимуми.

Същността на метода на екстремните стойности ще стане ясна при прилагането му за решаване на следните няколко задачи.

9. Задача. По гладките нишки AC и ABC се движат без триене две маниста (фиг. 6), като тръгват от т. A едновременно с еднакви по големина начални скорости. Покажете, че съществува такава начална скорост, при която манистата пристигат в т. C едновременно.



Фиг. 6.

Решение

Да означим с H разстоянието от правата AC до най-ниската точка на кривата ABC , а с $v = \sqrt{2gH}$ – скоростта, която едно тяло би придобило, падайки свободно от височина H . В зависимост от началната скорост v_0 на манистата ще разгледаме два екстремни случая.

1. Нека $v_0 \ll v$. Когато началната скорост клони към нула, на манистото, движещо се равномерно по правата AC е необходим безкрайно дълъг интервал време, за да измине своя път. В същото време второто манисто, придобивайки по наклона AB крайна скорост, ще измине пътя си (макар и по-дълъг) за краен интервал време. Следователно в този случай в т. C първо пристига манистото, движещо се по кривата ABC .

2. Нека $v_0 \gg v$. В този случай допълнителната скорост, която едното манисто получава, движейки се по наклона AB , може да се пренебрегне спрямо началната скорост и да се смята, че двете маниста се движат с еднакви скорости. Очевидно е тогава, че в т. C ще пристигне първо манистото, което изминава по-кратък път, т.е. това, което се движи по правата AC .

И така, при малки (в сравнение с $\sqrt{2gH}$) начални скорости първо в т. C пристига манистото, движещо се по кривата ABC , а при големи – движещото се по правата AC . И тъй като времето за придвижване от т. A до т. C е непрекъсната функция на началната скорост, следва, че наистина съществува някаква междинна стойност на v_0 , при която двете маниста пристигат в т. C едновременно.

Теми за размисъл. 1. По какво си приличат и по какво се различават тази задача и задача 3?

2. Може би ще опитате да превърнете тази задача в количествена, т.е. при зададено разстояние AC да намерите скоростта, при която двете маниста пристигат едновременно? Проблемът не е лесен, защото изисква да се намери времето за движение по полуокръжността, а това изисква интегриране.

Полет във ветровито време

10. Задача. Самолет лети от град A до град B и се връща обратно в град A с постоянна спрямо въздуха скорост. Кога пътуването е по-бързо при безветрие, или когато духа постоянен вятър от т. A към т. B ?

Решение

Разбира се, задачата се решава количествено относително лесно с познатите от кинематиката зависимости. Интересно е, че методът на екстремните стойности позволява тя да се реши и чисто качествено.

Да разгледаме два частни случая:

1. Нека скоростта на вятъра е нула. В този случай времето за връщане от т. B в т. A е равно на времето за отиване от т. A в т. B и общото време за пътуването е крайно.

2. Нека скоростите на вятъра и на самолета са равни. В този случай самолетът не би могъл да се върне в т. A , защото с каквато скорост се движи спрямо въздуха от т. B към т. A , със същата скорост вятърът го връща обратно. В този случай времето за пътуване е безкрайно голямо.

Тъй като няма съображения за това, че като функция от скоростта на вятъра времето на полета има екстремуми, следва да заключим, че това време е растяща функция на тази скорост. С други думи, при наличие на вятър времето за полет е винаги по-голямо, отколкото при безветрие.

Басейн, лодка, камък

11. Задача. Във воден басейн плава лодка, в която лежи камък. Ще се издигне или ще се понижи равнището на водата в басейна, ако камъкът се прехвърли от лодката на дъното на басейна?

Решение

Преди да решим задачата, ще обърнем внимание на два факта:

а) Масата, а не обемът на камъка определят дълбочината, на която потъва лодката, когато камъкът е в нея.

б) Ако камъкът бъде изваден от лодката, тя ще олекне, дълбочината на потапянето ѝ ще намалее, ще се намали и изместената от нея вода, вследствие на което равнището на водата в басейна съответно ще се понижи.

Нека прехвърлянето на камъка от лодката в басейна става на три стъпки:

1. Да си представим, че докато камъкът е още в лодката, някаква огромна сила го свива, така че обемът му клони към нула, без да променя неговата маса. По силата на а) при тази операция равнището на водата в басейна не се променя.

2. Изваждаме "безкрайно малкия", но с крайна маса камък от лодката. По силата на б) равнището на водата в басейна ще спадне.

3. Потапяме камъка в басейна – тъй като обемът на камъка е безкрайно малък, предизвиканото повишение на равнището на водата ще бъде пренебрежимо малко.

Общият резултат след тези три стъпки е ясен – равнището на водата в басейна ще бъде по-ниско от началното.

Коментар. В книгата на Дж.Гамов и М.Кливланд "Physics, Foundations and Frontiers" се съобщава, че на една научна конференция тази задача е била поставена на самия Гамов, на Роберт Опенхаймер (!) и на Нобеловия лауреат Феликс Блох (!!!). И тримата, без да се замислят много, отговорили погрешно...

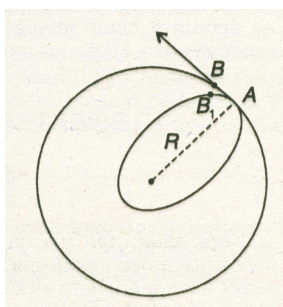
Тема за размисъл. Помислете върху следния вариант на задачата: Какво би станало с равнището на водата в басейна, ако не камък, а празен затворен варел се извади от лодката и се хвърли във водата?

Земята пада върху Слънцето

12. Задача. За колко време Земята би паднала върху Слънцето, ако внезапно загуби орбиталната си скорост?

Анализ. Тази задача трудно може да се отнесе към качествените, но методът на екстремните стойности е особено ефективен при решаването ѝ. За целта трябва да разгледаме как се променя траекторията на Земята при загуба на скорост.

Решение



Фиг. 7.

Нека приемем, че земната орбита е окръжност с радиус R (фиг. 7). Какво би станало, ако в т. A от орбитата си Земята загуби част от своята линейна скорост (без да променя посоката ѝ)? Трябва да отчетем два факта: първо, центроостремителната сила, необходима за осигуряване равномерно движение по окръжност с определен радиус, е пропорционална на квадрата на скоростта, и, второ, гравитационната сила остава непроменена, защото зависи само от разстоянието до Слънцето. Следователно, поради това, че гравитационната сила е по-голяма от необходимата центроостремителна сила, в един близък момент, след загубата на скорост, вместо да се окаже в т. B от окръжността, Земята се оказва в по-близката до Слънцето т. B_1 .

Според първия закон на Кеплер, новата орбита, върху която лежат т. A и т. B_1 , е елипса, в един от фокусите на която се намира Слънцето (фиг. 7). По условие скоростта на Земята в т. A е перпендикулярна към правата, която я свързва със Слънцето. И тъй

като радиус-векторът от фокуса към точка от елипсата е перпендикулярен на тангентата само във върховете на елипсата, лежащи на голямата ѝ ос, то т. A представлява афелий за новата орбита, т.е. точка на максимално отдалечаване от Слънцето.

Очевидно е, че ако загубата на скорост в т. A е по-голяма, новата елипса ще бъде още по-сплесната, а разстоянието от Слънцето до перихелия – още по-малко.

И тук идва ред на метода на екстремните стойности: в граничния случай, когато Земята загуби в т. A цялата си скорост, тя ще започне да пада към Слънцето по съединяващата ги отсечка с дължина R . В светлината на казаното по-горе, тази отсечка представлява "безкрайно сплесната" елипса, т.е. елипса с малка полуос 0 , голяма полуос $R/2$ и фокуси, съвпадащи с краищата на голямата полуос. Тъй като движенията се извършват по законите на Кеплер, ако T_0 е периодът на движение на Земята по кръговата орбита, т.е. по елипса с голяма полуос R , а T – периодът на движение по отсечката, в съответствие с третия закон:

$$(2) \quad \frac{T^2}{T_0^2} = \frac{(R/2)^3}{R^3} = \frac{1}{8} \quad \text{или} \quad T = \frac{T_0}{2\sqrt{2}}.$$

Понеже T е период, т.е. времето за движение от т. A до Слънцето и обратно, интересувашото ни време е два пъти по-малко, т.е. $\frac{T_0}{4\sqrt{2}}$. Тъй като $T_0 \approx 365$ дни, времето, за което Земята би паднала върху Слънцето, ако внезапно загуби орбиталната си скорост, е около 64,5 дни, т.е. малко повече от два месеца.

Коментар. Разбира се, пресметнатото по формула (2) време представлява времето до съвпадане на центровете на двете небесни тела, и то при условие, че до край можем да ги разглеждаме като материални точки. Последното условие явно не може да бъде изпълнено, дори да разглеждаме Земята като материална точка (радиусът ѝ е много по-малък от радиуса на Слънцето). Дори и в този случай от момента, в който Земята навлезе в Слънцето, трябва да се отчита, че неговото гравитационно поле намалява (в първо приближение – по линейен закон). А повърхността на Земята би достигнала слънчевата повърхност още по-рано.

2. В изложените разсъждения подминахме една "тънка" подробност – те не изключват възможността т. A да бъде не афелий, а перихелий на орбитата след загубата на скорост. Можете ли да приведете съображения, които изключват тази възможност?

Ефективно проветряване

13. Задача. Кога една стая ще се проветри по-бързо – когато е отворен половината прозорец, или когато прозорецът е изцяло отворен, но върху него е опъната мрежа, общата площ на отворите на която е равна на половината от площта на целия прозорец.

Решение

Доколкото не може да се посочи физичен аргумент в полза на твърдението, че възможността за проветряване има екстремум при определен размер на отворите на

мрежата, отговорът на поставения въпрос може да се търси чрез задаване на екстремна стойност на параметъра, чието влияние се следи. Единият екстремен случай е, когато мрежата има "един отвор" – т.е. това е споменатият в условието случай на наполовина отворен прозорец. Тогава очевидно стаята се проветрява. Другият екстремен случай е мрежа с "безкрайно много безкрайно малки" отвори, общата площ на които е, разбира се, колкото площта на половин прозорец. Също така очевидно е, че през мрежа с безкрайно малки отвори не може да премине нито една молекула, тъй като макар и малки, молекулите имат крайни размери. В този случай проветряването е невъзможно.

Следователно отговорът на поставения въпрос е: проветряването е по-бързо при наполовина отворен прозорец.

Взаимодействие на точков заряд със заредена метална сфера

Помните ли приписването на Дирак доказателство, че за всяка жена съществува едно оптимално разстояние, от което тя изглежда най-привлекателна? Според него, от безкрайно голямо разстояние привлекателността е нула, защото не се разкрива нито едно женско достойнство. При безкрайно малко разстояние пък привлекателността отново клони към нула, защото в този случай изпъкват всички недостатъци. Следователно наистина съществува разстояние, при което женската привлекателност е максимална.

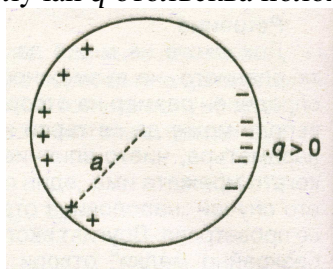
Това е типичен пример за прилагане метода на екстремните стойности, така че ако не за негов откривател, то поне за негов най-прочут популяризатор трябва да се смята Дирак. А решението на следващата задача буква по буква следва разсъждението на Дирак.

14. Задача. Докажете, че когато положителен точков заряд q взаимодейства с положително заредена проводяща сфера, съществува такова положение на заряда, при което силата на взаимодействие е нула.

Решение

Да разгледаме два екстремни случая. Първият – когато зарядът q е достатъчно далече от сферата. В този случай влиянието му върху разпределението на зарядите по сферата може да се пренебрегне, нейното поле е като на положителен точков заряд и следователно двата заряда ще се отблъскват като два едноименни точкови заряда.

Вторият екстремен случай е, когато точковият заряд q е безкрайно близо до повърхността на сферата. В този случай q отблъсква положителните заряди на сферата в



Фиг. 8.

нейния далечен край (фиг. 8), а в близкия индуцира отрицателни заряди. Тъй като разстоянието между q и сферата е малко спрямо нейния радиус, може да смятаме, че q се намира не пред сфера, а пред проводяща равнина. Тогава полето на индуцираните отрицателни заряди, в съответствие с метода на огледалните изображения, ще бъде като на точков заряд $(-q)$, поставен в точката, която е огледален образ на местоположението на q . В този случай общата действаща на q сила е сума от силата на отблъскване между q и положителния заряд на сферата и силата на привличане между q и $(-q)$. И тъй като първата от тях е резултат от взаимодействие между заряди, намиращи се на крайно разстояние, а втората – на безкрайно близко разположени заряди, общият резултат ще бъде сила на привличане.

Щом на голямо разстояние взаимодействието поражда сила на отблъскване, а на близко – сила на привличане, непременно съществува такова междинно положение, при което силата е нула¹.

Коментар. 1. Първата поука от решението на тази задача е, че трябва винаги да се помни при какви условия е валидно твърдението, че едноименните заряди се отблъскват, а разноименните се привличат. За точкови заряди във вакуум, разбира се, то винаги е валидно, но когато се разглеждат взаимодействия на тела, е възможно да се случи и друго. В разгледания пример един положителен точков заряд **се привлича** от положително заредена проводяща сфера. И не бива да се мисли, че този на пръв поглед парадоксален резултат се получава, защото използваме идеализацията **точков** заряд – същото бихме получили и за взаимодействието на две едноименно заредени метални сфери, стига радиусът на едната да бъде значително по-малък от радиуса на другата.

Затова, още веднъж – винаги, когато прилагаме закона на Кулон към взаимодействие на неточкови заряди, трябва да бъдем внимателни и подготвени за "изненади".

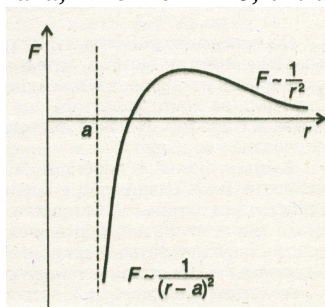
2. Задачата за пресмятане силата на взаимодействие между точков заряд и заредена проводяща сфера има точно решение, което може да се намери в учебниците по електродинамика. От това решение може да се определи разстоянието между заряда и

¹ За прецизност бихме могли да кажем, че съществува "поне едно" такова междинно положение, при което ще изпадам в ролята на физика от известния анекдот за цвета на шотландските овце. А анекдотът е поучителен: Пътувайки с влак през Шотландия художник, философ, математик и физик, виждат през прозореца овца. Художникът възкликнал: "Вижте, в Шотландия овцете били черни!" Философът му направил бележка, че би трябвало да каже: "Някои овце в Шотландия са черни." Математикът, отчитайки че не е сигурно дали в Шотландия има и друга черна овца, изказал още по-прецизното твърдение, че "Поне една от овцете в Шотландия е черна." Разбира се, точка на спора поставя физикът, довеждайки до абсурд ситуацията със суперпрецизното твърдение, че: "Съществуват интервали от време, през които поне една от шотландските овце, гледана откъм едната ѝ страна, изглежда черна."

Мисля, изводът от този анекдот е, че наистина във всичко трябва да се търси мяра – включително и в прецизността.

центъра на сферата, при което силата е нула (за съжаление за целта трябва да се решава алгебрично уравнение от степен, по-висока от втора). Оказва се, че наистина положението, при което силата е нула, е единствено.

Интересно е обаче, че дори без да се познава точното решение, характерът на зависимостта на силата от разстоянието може да се определи на основата на прости физични съображения. Графиката на проекцията на силата, която действа на q върху лъча, насочен от центъра на сферата към заряда, като функция от разстоянието r между тези две точки, е показана на фиг. 9. Както бе казано, при големи стойности на r взаимодействието е кулоново – силата е сила на отблъскване и расте като $1/r^2$ при намаляване на r . С доближаване на точката, в която $F = 0$, силата на отблъскване минава през



Фиг. 9.

една максимална стойност, след което се анулира и по-нататък вече е сила на привличане. Когато q е много близо до повърхността на сферата (т.е. $(r - a) \ll a$, където a е радиусът на сферата) силата е обратно пропорционална на квадрата на разстоянието $2(r - a)$ от q до огледалното му изображение.

От решението на задачата се вижда, че тя наистина е една съдържателна илюстрация на метода на екстремалните стойности. Освен това направеният коментар показва и какви конкретни резултати с дълбоко физично съдържание може да се получат при решаването на качествени задачи.

Тема за размисъл. И така, за всяка стойност на точковия заряд q и на едноименния заряд на металната сфера, съществува такова разстояние r между заряда и центъра на сферата, при което действащата на q сила е нула. Какво би станало, ако вместо q , на разстояние r от сферата поставим заряд $q' < q$. Ако смятате, че ще му действа определена сила, какъв ще бъде характерът ѝ – дали ще бъде сила на привличане или сила на отблъскване? А ако поставеният там заряд е $q'' > q$?

Надолу и нагоре по наклонена равнина с триене

15. Задача². Кое време е по-голямо: времето за спускане на едно тяло по наклонена равнина без начална скорост, или времето за издигане на тялото нагоре по равнината, когато му бъде придадена такава начална скорост, че то достигне и спре в горния край на равнината? Движенията се осъществяват **при наличие** на триене при хлъзгане.

² Буздин А. И. и др. *Задачи московских физических олимпиад*, Москва, “Наука”, ГРФМЛ, 1988.

Решение. Силата на триене зависи от нормалния натиск, който е един и същ при спускане и при издигане, и освен това – постоянен. Тъй като и теглото на тялото е постоянно, то и двете движения са равнопроменливи (едното – равноускорително, другото – равномерно).

Нека за конкретност означим с m масата на тялото, с h – височината на наклонената равнина, а с g – земното ускорение. Спускайки се без триене, в долния край на равнината тялото би имало скорост, която се описва с познатия израз $\sqrt{2gh}$. Поради триенето обаче, част от началната гравитационна потенциална енергия mgh се превръща във вътрешна енергия на триещите се тела, така че реално скоростта в края на спускането е $v_{\text{сп.}} < \sqrt{2gh}$.

В отсъствие на триене, за да се достигне тялото горния край на наклонената равнина, където потенциалната му енергия е mgh , би трябвало да го тласнем нагоре със скорост $\sqrt{2gh}$. Отново заради триенето, което превръща част от придадената кинетична енергия във вътрешна енергия, за да достигне тялото горния край на равнината, трябва да му придадем скорост $v_{\text{изд.}} > \sqrt{2gh}$.

Изводът от тези разсъждения е, че скоростта $v_{\text{сп.}}$, която тялото достига в долния край на наклонената равнина след спускане, и скоростта $v_{\text{изд.}}$, която трябва да му придадем, за да достигне горния ѝ край, са свързани с неравенството:

$$(1) \quad v_{\text{сп.}} < v_{\text{изд.}}$$

Известно е, че при равноускорително движение *без начална скорост*, изминатият път до момента, когато скоростта на тялото е v , е равен на $\frac{1}{2}vt$. Със същата формула се описва и пътя, който изминава до спирането си тяло при равнозакъснително движение с начална скорост v . Тъй като при движението нагоре и надолу изминатият път е един и същ (дължината на наклонената равнина), а двете движения – равнопроменливи, въз основа на тази формула можем да запишем равенството:

$$(2) \quad \frac{1}{2}v_{\text{сп.}}t_{\text{сп.}} = \frac{1}{2}v_{\text{изд.}}t_{\text{изд.}},$$

където $t_{\text{сп.}}$ и $t_{\text{изд.}}$ са съответно времената за спускане и за издигане. Оттук, при отчитане на неравенството (1), следва:

$$(10) \quad t_{\text{сп.}} > t_{\text{изд.}}$$

И така, отговорът на задачата е: времето за спускане на тялото е по-голямо от времето, за което то се издига.

Случаят, в който трябва да се отчита и съпротивлението на въздуха, е по-сложен, защото силата на съпротивление зависи от скоростта и движенията вече не са равнопроменливи. Въпреки това, въз основа на енергетични съображения, и в този случай може да се покаже, че изводът (10) остава валиден (вж. цитирания източник).

Сили с постоянна големина и сила с постоянна мощност

16. Задача. Две тела A и B започват да се движат едновременно под действие на сили с постоянни посоки. Големината на силата, която действа на A , е постоянна, а големината на силата, която действа на B се изменя така, че нейната мощност е постоянна³. Как се изменят с времето: отношението между ускоренията на телата, отношението между скоростите им и отношението между изминатите от тях пътища.

³ Сили, действащи с постоянна мощност, имат отношение към движението на превозните средства (велосипеди, леки коли и т.н.).

Решение: Означаваме съответно с m_i – масите, с a_i – ускоренията, с v_i – скоростите, с s_i – изминатите пътища в даден момент от времето t , а с F_i – действащите им сили ($i = 1$ за тялото A , $i = 2$ за тялото B). Тъй като движенията са праволинейни, всички величини ще смятаме положителни (a_i , v_i и F_i представляват проекциите на съответните вектори върху посоката на движение).

Началните скорости на двете тела са нула. Според втория принцип на Нютон ускорението на A при $t = 0$ е $a_1 = \frac{F_1}{m_1} = \text{const}$. С тяло B положението е по-сложно, защото

на него действа сила, чиято мощност $P_2 = \text{const} \neq 0$. От връзката $P_2 = F_2 v_2$ следва, че щом в началния момент $v_2 = 0$, то силата F_2 трябва да е безкрайно голяма (за да може произведението ѝ със скоростта да бъде крайна величина). Но, отново по втория принцип на Нютон, безкрайно голяма сила би придала на B безкрайно голямо ускорение, независимо от масата му.

От тези разсъждения следва, че в началото на движенията $a_2 > a_1$. От връзката $F_2 = \frac{P_2}{v_2}$ следва, че с течение на времето, заедно с нарастване на скоростта v_2 ще намалява F_2 , а с нея (поради $a_2 = \frac{F_2}{m_2}$) – и ускорението a_2 на тялото B . Така се достига до

момента τ' , в който ускоренията на телата се изравняват, т.е. $a_1 = a_2$.

Тъй като в интервала $0 < t < \tau'$ е изпълнено неравенството $a_1 < a_2$, а началните скорости на двете тела са равни, то в този времеви интервал ще са изпълнени неравенствата: $v_1 < v_2$ и $s_1 < s_2$.

След момента τ' скоростта v_2 продължава да расте ($a_2 > 0!$), а $F_2 = \frac{P_2}{v_2}$ и $a_2 = \frac{F_2}{m_2}$ – да намаляват. В същото време $a_1 = \text{const}$ и затова скоростта v_1 на тялото A , нараствайки по-бързо, в един момент τ'' се изравнява със скоростта v_2 на B . Тъй като през целия интервал $0 < t < \tau''$ съотношението между скоростите е $v_1 < v_2$, то в този интервал и съотношението между изминатите пътища ще бъде $s_1 < s_2$.

След момента τ'' неравенствата между ускоренията и скоростите са съответно: $a_1 > a_2$ и $v_1 > v_2$. Затова тялото A постепенно настига тяло B и в един момент τ''' изминатите от тях пътища се изравняват – $s_1 = s_2$. От този момент нататък и ускорението, и скоростта, и изминатият път от тялото B са по-малки от съответните величини, характеризиращи движението на тялото A .

Коментар. Тази качествена задача лесно може да се превърне в количествена. Парадоксалният резултат, който се получава в този случай се състои в това, че както отношенията τ''/τ' и τ'''/τ' на моментите τ' , τ'' и τ''' , така и отношенията на ускоренията, скоростите и пътищата в тези моменти, не зависят от масите на телата и действащите им сили. (вж. Таблицата).

Таблица

	τ'	τ''	τ'''
a_1/a_2	1	2	8/3
v_1/v_2	1/2	1	4/3
s_1/s_2	3/8	3/4	1

Конвекция във велосипедна гума

Ако искате да проверите доколко учениците ви разбират механизма на конвекцията и смисъла на аномалията на водата, можете да им предложите следната качествена задача.

17. Задача. Велосипедна гума е пълна с вода с температура $1\text{ }^{\circ}\text{C}$. Във водата има малък електрически нагревател. При какво положение на гумата и при какво положение на нагревателя водата ще се нагрее най-бързо до $10\text{ }^{\circ}\text{C}$?

(Описаната ситуация е трудно реализуема, но затова – конкретна, поради което всеки може да си я представи.)

Решение. Решението изисква съобразяване с няколко неща.

1. И гумата, и водата са лоши проводници на топлина, така че за бързо нагриване трябва да разчитаме не на топлопроводността, а на конвекцията (за лъчеизпускане и лъчепоглъщане е излишно да споменаваме).

2. Тъй като при конвекцията роля играе силата на тежестта, разположението на гумата трябва да създава максимално добри условия за проявлението ѝ. Ако гумата лежи в хоризонтална равнина, разлика във височините на различните нейни участъци и на съдържащата се в тях вода практически няма (радиусът на тръбата е малък спрямо радиуса на колелото). При това положение условията за конвекция са лоши – затоплената около нагревателя вода няма как да отиде и измести студената вода в диаметрално противоположния участък от колелото, тъй като те са на едно и също хоризонтално равнище. Ако обаче равнината, в която лежи гумата, е наклонена – конвекция вече може да се осъществи. Най-голяма разлика във височините и следователно – най-добри условия за конвекция има, ако гумата е във вертикална равнина.

3. Да уточним какво означава “положение на нагревателя”. Когато гумата е хоризонтална, всички нейни участъци са равноправни и положението на нагревателя е без значение. В т. 2. видяхме обаче, че решение трябва да се търси при вертикално положение на гумата, а в този случай вече има привилегирани положения на нагревателя – в най-долната и в най-горната нейни части. Ще разгледаме трите възможни случая:

- а) нагревателят е поставен във възможно най-ниско положение;
- б) нагревателят е поставен във възможно най-високо положение;
- в) нагревателят е поставен в произволно друго положение.

Да разгледаме първия случай, когато нагревателят е във възможно най-ниското положение. При включването му водата около него започва да се затопля, но поради аномалията плътността ѝ расте и тя остава на мястото си в най-долната част на гумата – конвекция няма и останалата вода се затопля само за сметка на слабата топлопроводност. Това продължава, докато температурата на водата около нагревателя достигне $4\text{ }^{\circ}\text{C}$. Оттук нататък с продължаване на нагриването плътността ѝ вече намалява и, издигайки се по лявата и по дясната част на гумата, ще отива към най-високата точка, т.е. започва конвекция. На мястото на издигналата се вода постъпва хладка вода, и тя се нагрива до $4\text{ }^{\circ}\text{C}$, започва да се издига и т.н. Следователно в този случай конвекция има, но тя започва с определено закъснение спрямо началото на нагриването.

Във втория случай, когато нагревателят е в най-високата точка, конвекцията започва веднага с включване на нагревателя: водата в най-високата точка става по-плътна и се спуска надолу по двете части на гумата към най-ниската част. На нейно място постъпва вода с температура $1\text{ }^{\circ}\text{C}$, и тя се загрева, и тя се спуска надолу и т.н. Тази конвекция обаче спира, щом температурата на всичката вода достигне $4\text{ }^{\circ}\text{C}$. При по-нататъшно нагриване плътността на водата в горната част на гумата започва да намалява и тя остава около нагревателя. Оттук нататък нагриването на останалата вода до $10\text{ }^{\circ}\text{C}$ може да става само за сметка на топлопроводността. (При това, в зависимост от мощността на нагревателя, не е изключено водата около него да заври, докато температурата в

долната част на гумата не е достигнала 10 °C.) Следователно в този случай водата ще се загрее до 10 °C по-бавно отколкото в предишния.

Остава да разгледаме третия случай. За конкретност нека предположим, че нагревателят е в средата на дясната половина на гумата (гледано срещу равнината, в която лежи). С включването му започва конвекция, като по-плътната затоплена вода се спуска надолу, а на нейно място отгоре идва студена вода. Последната се загрева, спуска се и т.н. – докато температурата навсякъде достигне 4 °C. В този момент конвекцията спира, но веднага започва в обратна посока – затоплената над 4 °C вода започва да се издига, а на нейно място отдолу постъпва вода с температура 4 °C, нагрява се и тя, издига се и т.н.

Дори от тези разсъждения е ясно, че най-бързо желаните 10 °C ще бъдат достигнати в третия случай. Обърнете внимание обаче на една съществена разлика между първите два и третия случай! В първите два конвекцията (когато я има) се осъществява така, както при замръзването на водата в едно езеро⁴: слоевете вода с различни плътности си разменят местата, като, така да се каже, минават **един през друг**. В третия случай обаче ситуацията е различна: порция вода с една плътност **замества** (или измества) втора порция вода, имаща друга плътност, а на мястото на първата идва трета порция вода. С други думи в случая има **циркуляция** на водата вътре в гумата – нещо, което липсва в първите два случая⁵. При направеното предположение за положението на нагревателя в началото, т.е. преди достигане на температура 4 °C, циркуляцията е по посока на движение на часовниковата стрелка, а след това – в обратна посока. Наличието на тази циркуляция способства допълнително за ускорено достигане на температура 10 °C от цялото количество вода.

Да погледнем процеса от друг ъгъл. В първите два от разгледаните три случая има симетрия: когато нагревателят е най-горе или най-долу, лявата и дясната половина на гумата са равноправни и като резултат – циркуляция няма. Когато обаче нарушим симетрията, поставяйки нагревателя (дори и малко) встрани, наблюдаваме съвсем ново явление – циркуляция на водата. Вероятно читателят е чувал за ролята на нарушените симетрии в съвременната теория на фундаменталните частици и техните взаимодействия. Тук разгледахме пример, който илюстрира до какво може да доведе нарушаването на симетрията в областта на класическата физика.

Проблем. Като имате предвид проведените разсъждения, помислете дали водата няма да се загрее най-бързо до 10 °C, ако използваме следната “тактика”. В началото поставяме гумата така, че нагревателят да е малко встрани от най-високата точка на гумата. Изчакваме температурата навсякъде да достигне 4 °C, след което завъртаме гумата, докато нагревателят да се окаже близо до най-ниската точка така, че да се запази посоката на началната циркуляция.

Тухла пада върху асансьор

Следната задача предоставя добри възможности за различни качествени разглеждания, както и за решаване чрез метода на екстремните стойности.

18. Задача. От тавана на асансьорна шахта се откъртва и полита надолу тухла. В кой случай пораженията върху кабината ще бъдат най-големи: а) когато тя е неподвижна; б) когато се издига нагоре; в) когато се спуска надолу? (Предполага се, че движението на асансьора нагоре и надолу са равномерни и с еднакви скорости.)

⁴ Пример, описван многократно в прогимназиалните учебници за обясняване защо зиме при дъното на един водоем винаги има вода с температура 4 °C.

⁵ Този случай също се описва в много учебници, когато се обяснява функционирането на водното отопление в ниски сгради, при които не са необходими циркуляционни помпи.

Анализ. Големината на последствията от удара зависи от относителната скорост на тухлата спрямо асансьора – при по-голяма относителна скорост пораженията биха били по-големи. Когато асансьорът се спуска, тухлата го настига и нейната относителна скорост е **разлика** от големините на скоростите им спрямо земята. Когато пък асансьорът се издига, в момента на удара относителната скорост на тухлата спрямо кабината е **сума** от големините на скоростите им спрямо земята. При неподвижен асансьор относителната скорост на тухлата спрямо него е равна на скоростта ѝ спрямо земята.

Ако спрем с разсъжденията дотук, би трябвало да очакваме, че пораженията ще бъдат най-малки, когато асансьорът се спуска и най-силни – когато се издига. Малко по-дълбоко вникване в ситуацията обаче разкрива и друга тенденция. Наистина, когато асансьорът се издига, той пресреща тухлата, изминатото от нея разстояние се скъсява, с което намалява и скоростта, придобита при свободното падане. Това би следвало да намали силата на удара. Обратно – когато асансьорът се спуска, на тухлата е необходимо повече време, за да го настигне, следователно тя придобива по-голяма скорост спрямо земята и това като че ли би трябвало да увеличи силата на удара.

Ясно е, че и двете разсъждения са правилни и тъй като водят да противоположни очаквания, само по-подробното разглеждане може да покаже кой е верният отговор.

Решение. Ще решим задачата чрез метода на екстремните стойности. Ще разгледаме движенията спрямо отправна система с начало в т. O , намираща се на тавана на асансьорната шахта и с вертикална ос Oy , насочена надолу. Разстоянието от т. O до тавана на асансьора в началния момент – момента на откъртване на тухлата, означаваме с H , земното ускорение, както обикновено – с g , а големината на постоянната скорост, с която се спуска или издига асансьорът – с v . Ще търсим относителната скорост u_r на тухлата спрямо кабината в трите, посочени в условието случая.

Нека първо разгледаме случай а) – неподвижен асансьор ($v = 0$). Както бе отбелязано по-горе, в този случай търсената относителна скорост е равна на скоростта $u = \sqrt{2gH}$ на тяло след свободно падане от височина H . С други думи в този случай относителната скорост е

$$(1) \quad u_r = \sqrt{2gH}.$$

В случай б) асансьорът се движи нагоре. Нека разгледаме ситуацията при екстремна стойност за скоростта му – когато v е много по-голяма от определената от (1) стойност, т.е. при $v \gg \sqrt{2gH}$. При това условие кабината ще достига тавана на шахтата преди още тухлата да придобие някаква скорост. Т.е. – в този случай в момента на удара скоростта на тухлата спрямо земята може да се пренебрегне и големината на относителната и скорост u_r ще бъде просто равна на скоростта на асансьора:

$$(2) \quad u_r \approx v \gg \sqrt{2gH}.$$

Сравнението между (1) и (2) показва, че в този случай пораженията ще бъдат по-големи, отколкото в случай а).

В случай в) асансьорът се спуска. Отново предполагаем, че скоростта му удовлетворява неравенството $v \gg \sqrt{2gH}$. В този случай на тухлата ще е необходимо много повече време за застигане на кабината, изминатия от нея път ще бъде много по-голям от H и следователно можем да смятаме, че пътищата на двете тела са приблизително равни. Ако означим с t момента на удара, пътят на кабината е vt , а на тухлата – $\frac{1}{2}gt^2$.

Като приравним двете величини, съкратим на t и отчетем, че $u = gt$ е точно скоростта на тухлата в момента на удара, получаваме $u \approx 2v$. И тъй като сега търсената относителна скорост е **разлика** от скоростите на двете тела, за големината ѝ получаваме:

$$(3) \quad u_r'' = u - v \approx 2v - v = v \gg \sqrt{2gH}.$$

Заключението е, че и в този случай пораженията ще бъдат по-големи, отколкото върху неподвижен асансьор.

И тъй като няма физични съображения, от които да следва, че при междинни (т.е. – не екстремни) големина на скоростта на асансьора относителната скорост би имала минимума или максимуми, можем да заключим, че тухлата ще нанесе най-малки поражения върху кабината, когато последната е неподвижна. С други думи, верният отговор на задачата е а).

Коментар. От сравнението на (2) и (3) следва, че поне при големи стойности на v , относителната скорост в момента на удара *не зависи* от това, дали асансьорът се издига или спуска. Едно пълно количествено решение на задачата показва, че този извод остава в сила и при произволно v .

Накъде ще тръгне колелото?

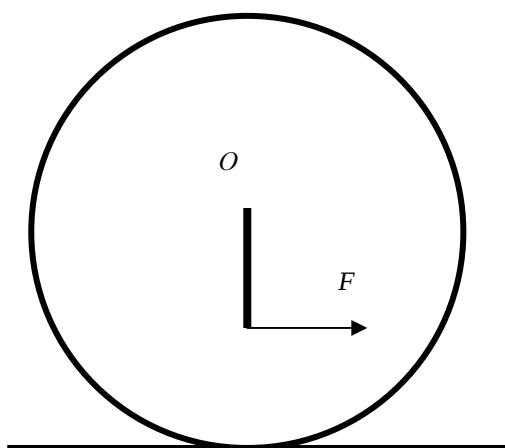
19. Задача. Единият педал на детски триколесен велосипед е в най-ниско положение. Накъде ще тръгне велосипедът, ако детето:

А) седи на велосипеда и натисне с крак педала напред?

Б) стои встрани от велосипеда и натисне с ръка педала напред?

Анализ. Не е необходимо човек да е учил физика, за да съобрази, че в случай А) цялата система (детето с колелото) ще тръгне назад. Не така очевиден е отговорът на въпроса в случай Б).

Преди всичко да изчистим ситуацията – велосипедът е необходим само за нагледност. Задните колела в случая са пасивни, те служат само за осигуряване на стабилност – гарантират, че предното колело остава във вертикална равнина. Затова се абстрахираме от конструкцията на велосипеда и разглеждаме вертикално колело върху хоризонтална повърхност, към оста на което е прикрепен насочен вертикално надолу лост (фиг. 1).



Фиг. 1.

Ако колелото не се опира на повърхността, а оста му е фиксирана, насочената надясно сила F би го завъртяла обратно на посоката на въртене на часовата стрелка. Наличието на хоризонталната равнина е причина за поява на **сила на триене в покой**. В нашия случай тази сила е насочена назад (триенето в покой е насочено винаги противоположно на силата, която предизвиква движението⁶) и създава въртящ момент, насо-

⁶ Вж. напр. файла triene_v_pokoy.pdf .

чен противоположно на момента, дължащ се на силата F . Ето защо посоката на завъртане на колелото зависи от съотношението между двата въртящи момента.

Случай А). Когато седи върху велосипеда, детето и велосипедът образуват *една* система. Силата F , с която детето натиска педала напред, е вътрешна за системата сила и тя се уравновесява с противодействието ($-F$), приложено върху детето (трети принцип на Нютон). Движението на системата се определя от единствената външна сила – насочената назад сила на триене в покой. Ето защо в този случай велосипедът тръгва **назад** – случаят е аналогичен с движението на автомобил, което също се осъществява под въздействие на вътрешна сила с източник – двигателя, като в края на краищата движението е в посока на силата на триене в покой между гуммите и настилка.

Случай Б). В този случай системата – тя състои само от велосипеда, а детето е външно тяло, източник на *външната* сила F . Решението може да използва факта, че накъдето и да се върти колелото, моментната скорост на точката, в която то контактува със “земята” е нула (няма приплъзване). Ако разглеждаме тази точка като моментен център на въртене на цялото колело, спрямо нея рамото на триенето в покой е нула и то не влияе на посоката на въртене. А понеже в този случай силата F се стреми да завърти колелото около неподвижния център по часовата стрелка, то следва, че в този случай колелото ще тръгне **напред**.

Мехурчето на либелата

Вероятно познавате устройството на либелата (нивелира), с който зидарите проверяват дали една равнина (стена, под и т.н.) е хоризонтална или вертикална. С този уред си служим и въщи, когато трябва правилно да монтираме хладилника, автоматичната пералня и някои по-големи мебели. Основната част на либелата е леко извита стъклена тръбичка, запълнена с течност, като в течността е оставено малко въздушно мехурче (в него очевидно има и пари на течността, но това в случая изглежда не е съществено). Когато либелата е неподвижна, под действие на изтласкващата Архимедова сила мехурчето заема възможно най-високото положение.

В училище учим за температурното разширение на телата и, между другото, че при една и съща промяна на температурата (грубо казано) най-много се разширяват газовете, след това – течностите и, най-малко – твърдите тела. Тези знания са необходими при решаване на следната качествена задача.

20. Задача. Кога мехурчето на либелата е по-голямо – през зимата, или през лятото?

Решение. Това е типичен пример за т.нар. “коварни” задачи, които със своята простота подвеждат към грешен отговор. За това спомага и подадената преди условието информация: всички тела се разширяват при нагриване, но най-много се разширяват газовете – “следователно” през лятото, когато температурата е по-висока, обемът на мехурчето трябва да бъде по-голям.

Това погрешно заключение е резултат от формално прилагане на знания, без съобразяване с конкретните условия. Вярно е, че относителното увеличение на обема на газовете при повишаване на температурата е по-голямо от това на течностите и на твърдите тела, но *когато газът се намира при постоянно налягане!* (Спомнете си как се проверява законът на Гей-Люсак – с газ в колба, затворена с хоризонтална тръбичка, в която има капка живак. Тъкмо свободното придвижване на капката по тръбичката осигурява, че налягането на газа в колбата при всяка температура е равно на атмосферното налягане.)

Газовото мехурче в либелата няма възможност да се разширява свободно. При по-високата температура се разширява и стъклената тръбичка, и течността. Увеличени-

ето на обема на тръбичката обаче е по-малко от увеличението на обема на течността. И като не може да излезе извън тръбичката, течността просто свива газовото мехурче, защото газовете са свиваеми, а течностите – практически не са.

Следователно през лятото обемът на мехурчето е по-малък от размера му през зимата.

Тема за размисъл. След решаването на подобна задача у човек винаги остава определена несигурност: "А дали наистина сме отчели всички съществени фактори?" Тук не става въпрос за това, че има течности и твърди тела с аномални поведения, различни "патологични" ситуации и др.п. Дали обаче на отговора няма да повлияе наличието на пари на течността в мехурчето? Тези пари сигурно са наситени, а налягането на наситените пари зависи от температурата. През зимата това налягане е по-ниско, следователно количеството на парите в мехурчето – по-малко. Това пък води до намаляване на газа в мехурчето и увеличаване количеството на течността, но дали този ефект е значим, може ли да конкурира ефекта от свиването на течността зиме?

За да се отговори на тези въпроси вероятно трябва да се направят някои допълнителни предположения и със сигурност – справки с таблиците за налягане на наситени пари при различни температури, за коефициентите на температурно разширение и т.н. Опитайте да задълбочите разглежданията в тази посока.

Падаща тухла отскача от каучуково топче

Преди години на участниците в една от международните олимпиади по физика в Съветския съюз бе предложена следната качествена задача, включена и в интернет-лекцията от задачи на Я. Кантор (<http://star.tau.ac.il/QUIZ/>, ноември, 1998). Задачата е интересна, първо, с това, че макар в условието ѝ да не фигурира нито едно число и методът на решаването ѝ всъщност да е **качествен**, отговорът е числен, т.е. – **количествен**. Както обаче сме обръщали внимание и при други задачи, и тази допуска преход от качествено към количествено разглеждане, при което в случая съществено се променя количественият резултат.

21. Задача. Тежка тухла пада върху лежащо на хоризонтална плоскост малко каучуково топче. След абсолютно еластичен удар тухлата отскача вертикално на почти същата височина, от която е пусната. На каква височина отскача топчето?

Решение. От условието се подразбира, че масата на топчето е много по-малка от масата на тухлата. Преди всичко трябва да отговорим на въпроса защо, щом ударът е еластичен, тухлата не отскача на височината, от която е паднала, а само на *почти* същата височина. За целта трябва да разгледаме по-детайлно явлението.

Първо, от момента на докосване на тухлата до топчето, до момента, в който скоростта на тухлата става нула, нейната кинетична енергия се преобразува в енергия на еластичната деформация на топчето. От този момент нататък започва обратен процес: топчето започва да възстановява формата си, оттласква тухлата нагоре и енергията на деформацията отново се преобразува в кинетична енергия на тухлата. Ако запасената в топчето енергия се предаде изцяло на тухлата, тя би отскочила на височина, *точно* равна на началната. Фактът, че в условието е указано, че височината е по-малка, подсказва, че трябва да се отчете още някакво явление.

За да стане ясно какво пропускаме дотук, разглеждаме ситуацията в момента, в който топчето възстановява сферичната си форма, тухлата се отделя от него и излита нагоре. В този момент скоростите на тухлата и на най-горната точка от топчето са равни. В същия момент скоростта на най-долната точка от топчето, тази, която се допира до хоризонталната плоскост, както през цялото времетраене на удара, е нула. Следователно скоростта на *центъра на масите* на топчето, намиращ се *по средата* между не-

говите най-горна и най-долна точка, ще се движи нагоре със скорост, равна на половината от скоростта, с която отскача тухлата. Тъкмо поради наличието на тази скорост, след удара топчето не остава върху плоскостта, а също отскача нагоре. И тъй като височината, до която достига хвърлено нагоре тяло, е правопропорционална на квадрата на началната скорост ($h = \frac{v^2}{2g}$), щом скоростта на топчето е два пъти по-малка от скоростта на тухлата, **то ще се издигне на височина, четири пъти по-малка от височината, на която се е издигнала тухлата.**

Едно по-точно количествено разглеждане на задачата, при което кинетичната енергия на топчето се пресмята като сбор от кинетичните енергии на отделните хоризонтални слоеве, на които можем мислено да го разделим, показва, то ще отскочи на по-голяма от посочената по-горе височина – не на 25 %, а на 30 % от максималната височина, на която отскача тухлата (вж. файла I chast\2 zadachi-eseta\62 tuhla i topche).

Архимед, но и Паскал!

В училище хидростатиката се изучава твърде рано – може би заради относително лесно разбираемия смисъл на законите на Архимед и на Паскал. Това ранно изучаване и все още слабо развитата способност на учениците да правят по-дълги и абстрактни разсъждения, както и неумението им да извършват дори и прости математически преобразования, са сериозна пречка за разглеждане на редица интересни от физична гледна точка задачи. Доколкото обаче подобни задачи ефективно способстват за развиване на физична интуиция, желателно е на по-късните етапи на обучение да се намери възможност за разглеждането им поне с онези ученици, които проявяват по-голям интерес към физиката. По-долу е разгледана точно такава задача.

Въпрос. Как биха се държали корабите в моретата и океаните, ако Земята внезапно изгуби атмосферата си – ще потънат малко по-дълбоко, или малко ще изплуват?

Погрешен отговор. Първото нещо, което идва на ум е, че в отсъствието на атмосфера корабите ще “газят” (както се изразяват професионалистите) във водата по-малко, защото вече няма атмосферен въздух, който ги притиска надолу, т.е. – малко ще изплуват.

Резултатът обаче е обратен, но за да стане ясно защо, ще разгледаме пример, в който участват само течности. Ние, разбира се, знаем, че въздухът е флуид и се подчинява на всички закономерности, наблюдавани при флуидите, но огромната разлика между неговата и на водата плътност (1000 пъти!) като че ли пречи на осмисляне на някои факти и на свеждане разбирането им на интуитивно равнище.

22. Задача. В широк, до половина пълен с вода съд, плава дъбова дъска. Чрез внимателно доливане на спирт върху дъската съдът се допълва така, че двете течности не се смесят. Какво ще бъде равнището на водата в така напълнения съд – по-ниско, или по-високо от началното?

Всъщност, това е старият въпрос за корабите, само че сега вместо за кораб става дума за парче дърво, вместо за въздух – за спирт. Ясно е, че ако доливането на спирт предизвика издигане на парчето дъска, равнището на водата ще спадне и обратно.

Решение. Плътността на дъбовата дъска ($\rho = 900 \text{ kg/m}^3$) е по-малка от плътността на водата ($\rho_0 = 1000 \text{ kg/m}^3$), но по-голяма от плътността на спирта ($\rho' = 800 \text{ kg/m}^3$), така че заради неравенствата $\rho' < \rho < \rho_0$ парчето плува във вода, но потъва в спирт.

Преди доливането на спирта, теглото на дъската е равно на теглото на изместената от нея вода (Архимед!). След добавяне на спирта неговото равнище е над горната повърхност на дъската и упражнява върху нея определено хидростатично налягане. То обаче е по-малко от налягането на спирта върху водната повърхност, защото равнището

на водата е по-ниско от равнището на горната повърхност на дъската. Нालягането на спирта върху водната повърхност се предава във всички посоки навътре във водата (Паскал!), така че върху долната повърхност на дъската действа и допълнителна изтласкваща сила, дължаща се на разликата от налягането на спирта върху водната повърхност и върху горната повърхност на дъската.

Тъй като теглото на дъската се уравновесява от две изтласкващи сили (едната, дължаща се на изместената вода, другата – на изместения спирт), ясно е, че дължащата се на водата сила в случая е по-малка от действащата преди добавяне на спирта. Това означава, че при наличие на спирт обемът на подводната част на дъската е по-малък, тя е изплувала малко над водата, което води до понижение на водното равнище.

По същата логика, ако атмосферата изчезне, корабите *малко* ще се издигнат над водното равнище, въпреки че вече нищо не ги “натиска отгоре”.

Коментар. “Малко” – колко малко? Дали тук не става дума за ненаблюдаеми величини – ако се окаже, че разликата е микрони, едва ли си е струвало да разсъждаваме по въпроса (оставяме настрана въпроса, че атмосферата няма как мигновено да изчезне). За да отговорим на този въпрос, трябва да направим количествени пресмятания. Те показват, че при конкретните плътности на водата, спирта и дъската, последната, когато плава само във вода, над водната повърхност се намира само 10 % от дебелината ѝ. След доливането на спирта над равнището на водата вече се оказва половината дъска. По подобен начин, ако един кораб с височина 10 m “гази” на дълбочина 3 m, след “изчезване” на атмосферата ще “потъне” със 7 mm – не е много, но не е и незабележимо малко (вж. файла I chast\2 zadachi-eseta\59 Arhimed i Paskal).

Отново – кой пристига пръв?

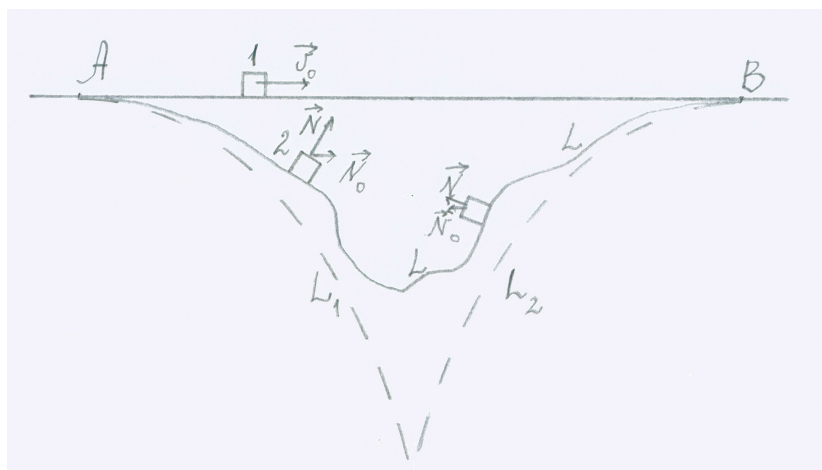
Парадоксът на пистовото колоездене. Известен⁷ е следният парадоксален факт: ако един колоездач по хоризонтален път може да измине за час 60 km, за същото време по пистата на колодрума изминава до 70 km. Проблемът е да се обясни този парадокс.

С хоризонталния път нещата са ясни – може да се приеме, че по него скоростта на колоездача е постоянна. За да разберем с какво се различава движението по пистата, трябва да си представим нейната форма. Силно опростявайки ситуацията, можем да я разглеждаме като съставена от два успоредни хоризонтални участъка, съединени в двата си края с по един сектор, ограничен от две полуокръжности. Вътрешната полуокръжност е хоризонтална, а средата на външната е издигната с няколко метра така, че се образува *вираж*. Навлизайки в завоя, колоездачът се издига към външния ръб на виража и наклонява велосипеда към вътрешността на завоя на ъгъл, при който хоризонталната съставляваща на гравитационната сила създава достатъчно голямо центростремително ускорение. При това положение велосипедът остава приблизително перпендикулярен на пистата и затова – стабилен. Ако вираж липсва, накланяйки велосипеда, колоездачът рискува да падне, в случай че сцеплението между гумите и настилка не е достатъчно голямо. Така основната роля на виража е да осигури безопасност в завоя.

Оказва се обаче, че наличието на вираж има отношение и към изясняване на парадокса, за който стана дума в началото. За да разберем ролята му, трябва да решим следната задача.

23. Задача. Две тела започват да се хлъзгат без триене и с една и съща начална скорост v_0 по релси от т. А до т. В. Релсите лежат във вертикална равнина, като траекторията на тяло 1 е хоризонтална отсечка, а траекторията L на тяло 2 се намира изцяло под отсечката и има форма, показана на фиг. 1. Кое тяло пристига първо в т. В?

⁷ Вж. напр. Stork D.G., Ju-xing Yang *The unrestrained brachistochrone*, Am. J. Phys., 54, 1986, 992–997.



Фиг. 1.

Предварителен коментар. Формата на кривата L изглежда произволна, но тя трябва да отговаря на няколко условия, които гарантират, че хлъзгайки се по нея, тялото 2 не напуска релсата. Така например, тя трябва да бъде достатъчно гладка (т.е. навсякъде радиусът на кривината ѝ трябва да е значително по-голям от размерите на тялото); нито в низходящата, нито във възходящата ѝ част не трябва да има много стръмни участъци, от които тялото може да излети или в които да “заседне” и т.н. Лесно може да се съобрази например, че низходящата част на траекторията трябва да се намира изцяло над параболата L_1 , по която би се движило тяло, хвърлено от т. A надясно с хоризонтална начална скорост v_0 . В противен случай тялото ще напусне L , тъй като вертикалната съставляваща на скоростта му няма да бъде достатъчно голяма. Подобно ограничение може да се формулира и за възходящата част на L : тя трябва да лежи изцяло над параболата L_2 , по която би се движило тяло, хвърлено от т. B на ляво с хоризонтална начална скорост v_0 . И тъй като допирателните към L_1 и L_2 съответно в т. A и в т. B са хоризонтални, в тези точки хоризонтални са и допирателните към L . (Ако например допирателната към L в т. B сключва ненулев ъгъл с отсечката AB , достигайки края на пътя си тялото 2 би излетяло над т. B , т.е. би напуснало релсата си.)

Именно възможността да напусне релсата или да “заседне” в евентуална нейна чупка отличава тази задача от задачите за движения на маниста по спици (вж. напр. файловете 54 manista.pdf и 55 manista.pdf) – при манистата траекторията е фиксирана и манистото не може да я напусне. Както ще се убедим, този факт се оказва съществен и затова резултатът от решението на задачата сега е съвсем различен от резултатите за манистата.

Решение 1. За да отговорим на поставения в условието въпрос е достатъчно да разгледаме *хоризонталната* съставляваща на скоростите на двете тела. За тяло 1 тя е постоянна и то изминава пътя си с постоянна скорост. В низходящата част от траекторията на тялото 2 действа нормална реакция на опората $\vec{N}$, чиято хоризонтална съставляваща $\vec{N}_0$ е по-посока на движението (вж. фиг. 1) и следователно **увеличава** хоризонталната компонента на скоростта. Следователно по низходящия участък от L хоризонталната скорост на тялото 2 е по-голяма от скоростта на тялото 1.

По възходящия участък от L хоризонталната съставляваща на реакцията на опората $\vec{N}$ е насочена в обратна посока и затова в този участък хоризонталната съставляваща на скоростта на тялото 2 намалява. Въпреки това, по целия този участък тя остава по-голяма от v_0 , защото законът за запазване на енергията гарантира, че скоростта на тялото 2 става v_0 едва, когато то се издигне до т. B .

И така, щом и по низходящата, и по възходящата част от L хоризонталната съставляваща на скоростта на тялото 2 е по-голяма от v_0 , то тялото 2 пристига първо в т. B . А

това означава, че хоризонталната средна скорост на тялото 2 е по-голяма от хоризонталната средна скорост на тялото 1, което на пръв поглед (но само на пръв поглед!) е в противоречие с консервативността на гравитационната сила.

Именно с това заключение в цитираната по-горе работа се обяснява парадоксът на пистовите колоездачи – те използват виражите за увеличаване на средната си скорост.

Решение 2. Отговор на задачата може да се получи и с *метода на екстремните стойности*. За целта разглеждаме граничния случай на безкрайно малка начална скорост v_0 . В този случай на тялото 1 е необходимо безкрайно дълго време, за да достигне т. В. Тялото 2 обаче, хлъзгайки се надолу по L , придобива някаква скорост, чиято хоризонтална съставляща е крайна и затова изминава пътя си за крайно време, т.е. пристига в т. В преди тялото 1.

Забележете, че за разлика от задачата за манистата, тук не можем да разглеждаме другия граничен случай – случая на много голяма начална скорост, защото в него тялото 2 със сигурност в някоя точка ще напусне релсата си.

Чаша с вода – една класическа задача

В сборниците със задачи и в методическата литература се срещат различни задачи, свързана с центъра на масите (ЦМ) на системата от няколко тела, за чието решаване е достатъчно прилагането едно единствено *правило*⁸:

Центърът на масите на системата от две тела се намира:

- **върху отсечката, свързваща техните центрове на масите,**
- **по-близо до тялото с по-голяма маса.**

Първото от съдържащите се в това правило две твърдения е интуитивно ясно.

Пример за ефективността на това правило е следната задача.

24. Задача. Цилиндрична чаша с вода лежи на хоризонтална равнина. При какво положение на свободната повърхност (нивото) на водата ЦМ на системата чаша–вода е най-ниско?

Анализ. Симетрията относно оста на цилиндъра подсказва, че задачата е едномерна – достатъчно е говорим за *височини* над равнината, върху която лежи чашата: за височината на нивото на водата, за височината на ЦМ, за височината на чашата и т.н.

Условието не съдържа сведения нито за материала, от който е направена чашата (за плътността му), нито за нейните геометрични размери. И тъй като една коректно формулирана задача трябва да предоставя достатъчно информация за решаването ѝ, следва, че отговорът не зависи нито от височината на чашата, нито от дебелината на стените и на дъното ѝ, нито от това, дали е стъклена, метална и др.п.

При това положение остават само две величини, които може да фигурират в отговора: височината на ЦМ на системата чаша–вода, и височината на нивото на водата в чашата. Това заключение подсказва донякъде какъв би могъл да бъде отговорът. Наистина, би било странно, ако от решението следва, че ЦМ на системата е най-ниско, когато нивото на водата е на половина от височината на ЦМ (или 2 пъти, или 5 пъти по високо от него). В отговора множители като 0,5, 2, 5 и пр. може да се появят, ако той зависи например от отношението между плътностите на водата и на материала на чашата, или от отношението между височината на чашата и дебелината на дъното ѝ и др.п. Както отбелязахме по-горе, условието изключва подобни зависимости.

Така стигаме до **предположението**, че може би ЦМ на системата е най-ниско, когато положението му **съвпада** с нивото на водата. Това предположение, разбира се,

⁸ За обосновка на това правило вж. файла I chast\2 zadachi-eseta\42 chasha s pyasak.

не е обосновано, а дали е вярно, може да потвърди или отхвърли само решението на задачата.

Решение. Да проследим мислено процеса на пълнене чашата с вода. Да означим с h_0 височината на ЦМ на **празната** чаша и налеем в нея достатъчно тънък слой вода, така че неговият ЦМ се намира **под** ЦМ на празната чаша. Вече разполагаме със система от две тела – празна чаша и слой вода. Според цитираното в началото *правило*, общият ЦМ на тази система се намира върху отсечката, свързваща двата ЦМ – на празната чаша, и на водния слой. И тъй като ЦМ на водата е по-ниско от h_0 , то височината h_1 на общия ЦМ ще удовлетворява неравенството $h_1 < h_0$.

Ако нивото на водата е под h_1 , можем да повторим процедурата – добавяме втори слой вода, толкова дебел, че неговият ЦМ да бъде по-ниско от h_1 . Разглеждаме нова система от две тела: чашата с първия воден слой, чиито ЦМ е на височина h_1 , и добавения втори воден слой. Както и в предишния случай, прилагайки *правилото* заключаваме, че височината h_2 на ЦМ на новата система удовлетворява неравенството $h_2 < h_1$.

Ако и след второто доливане нивото на водата е все още под ЦМ на системата, продължаваме процеса – доливаме трети слой вода и т.н.

Така, след всяко добавяне на вода нейното ниво се покачва, а височината на ЦМ на общата система слиза надолу. Очевидно е, че продължавайки този процес, ще достигнем положение, при което ЦМ на системата чаша с вода се оказва върху свободната повърхност на водата. Да означим с H височината на това равнище.

Нека след това продължим процеса и добавим нов слой вода. Неговият ЦМ вече е по-високо от H и според все същото *правило*, общият център на масите вече също ще е по-високо от H . Ако доливаме още вода, общият ЦМ ще се изкачва все по-високо.

Следователно предположението, което направихме при анализа на задачата, се оказва правилно: **центърът на масите на чаша с вода е най-ниско, когато лежи върху свободната повърхност на водата.**

Коментар.

– Интересно е, че за решаване задачата се оказва достатъчна само *първата* част на *правилото* – никъде не използвахме, че общият ЦМ е по-близо до по-масивното тяло.

– Срещат се различни варианти на разгледаната задача. Тъй като височината на ЦМ на едно лежащо върху хоризонтална плоскост тяло е свързана с неговата стабилност, понякога се говори не за вода, а за мокър пясък. С други думи, търси се при какво ниво на мокрия пясък, насипан в цилиндрична чаша, системата е най-стабилна. Очевидно е, че при такава постановка вече водата не е подходяща, защото при наклоняване на чашата свободната водна повърхност остава хоризонтална и това нарушава цилиндричната симетрия.

Потенциометрично или чрез предсъпротивление?

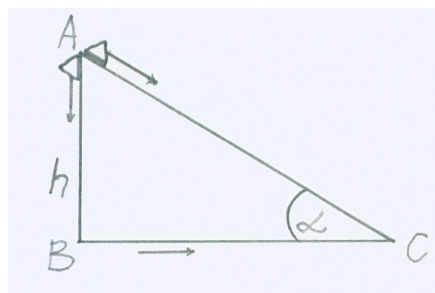
25. Задача. От източник на постоянно ЕДН се захранва консуматор, работното напрежение на който е по-ниско от ЕДН на източника. Как от енергийна гледна точка е по-изгодно да се захрани консуматора: потенциометрично, или през подходящо предсъпротивление?

Решение. Енергийната изгода в случая се определя от отношението между полезната мощност P_0 , отделена в консуматора, и отдадената от източника на ЕДН мощност P . Мощността P_0 на консуматора е фиксирана – при нормалната му работа тя има някаква номинална стойност. Следователно по-изгоден е случаят, в който P е минимално.

За решението на задачата е съществено, че мощността на източника е пропорционална на тока I през него ($P = \mathcal{E}I$, където $\mathcal{E}$ е ЕДН на източника). При свързване чрез предсъпротивление веригата е неразклонена и през всички нейни части (източник, консуматор, предсъпротивление) тече номиналният ток I_0 на консуматора. Когато напрежението на консуматора се подава потенциометрично, през него трябва да тече същия номинален ток I_0 . Успоредно на него обаче през потенциометъра тече още някакъв ток, така че в този случай общият ток I през източника е по-голям, отколкото при включване чрез предсъпротивление. И тъй като само токът през източника определя кой случай е по-изгоден, следва да заключим, че от енергийна гледна точка по-изгодно е да включим консуматора през предсъпротивление.

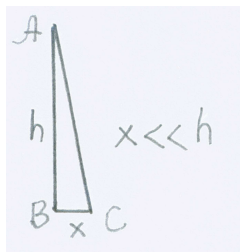
Движение по наклонена равнина

26. Задача. Две еднакви тела започват движение едновременно. Първото тяло се хлъзга без триене по наклонената равнина AC (фиг. 1). Второто тяло в началото пада свободно до т. B , след която (претърпявайки подходящо отражение) продължава с придобитата скорост по хоризонталната права BC (също без триене). Кое тяло пристига в т. C първо?



Фиг. 1.

Решение. Задачата допуска решение по метода на екстремните стойности. Удобно е да разглеждаме зависимостта на времената на движение не от ъгъла α , а от разстоянието $x = |BC|$ (фиг. 2). В първия екстремален случай, при $x \rightarrow 0$ (т.е. $\alpha \rightarrow 90^\circ$) пътищата $|AB|$ и $|AC|$ са почти равни, почти равни са и ускоренията на телата по тях. И тъй като второто тяло има да измине допълнително и хоризонталното разстояние x , второто тяло ще закъснее спрямо първото, което се хлъзга по наклонената равнина.

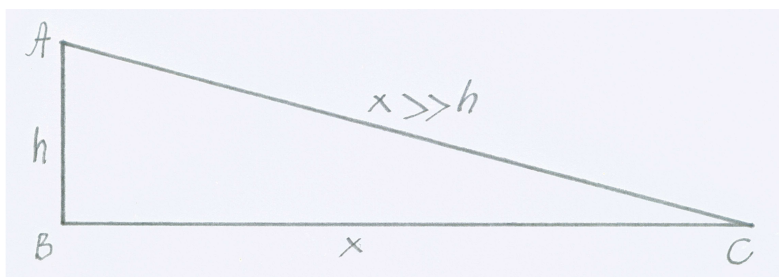


Фиг. 2.

(Забележка: Един привикнал да разсъждава по-строго ум би могъл да възрази: “Почти равни, почти равни...”, но все пак $|AC|$ е по-дълго от $|AB|$, и ускорението по наклона е по-малко от ускорението по вертикалата. Дали тези два факта не компенсират удължението на времето по начупената линия ABC ? За да се убедим, че изводът наистина е правилен, трябва да отчетем, че при $\varepsilon \ll 1$ е изпълнено приблизителното равенство $\sqrt{1+\varepsilon} \approx 1 + \frac{\varepsilon}{2}$. С помощта на тази формула и свойствата на подобни триъгълници се уверяваме, че при $x \ll h$ дължината на начупената линия ABC се различава от

дължината на AB с малка величина от първи порядък, т.е. $h + x = h(1 + \frac{x}{h})$. В същия случай намалението на ускорението по AC спрямо ускорението g на свободното падане, и удължението на AC спрямо AB са величини от порядъка на $(\frac{x}{h})^2$ и следователно дължакото се на тях увеличение на времето на движение по наклонената равнина наистина може да се пренебрегне спрямо увеличението на времето за движение на второто тяло, което е от порядъка на $\frac{x}{h}$.)

Във втория екстремален случай $x \rightarrow \infty$, т.е. наклонът е много малък (фиг. 3). В този случай отново пътищата на двете тела са почти еднакво дълги. Второто тяло обаче, по време на свободното падане, набира скорост $v = \sqrt{2gh}$ и с нея изминава остатъка от пътя BC , докато първото тяло достига тази скорост едва в края на пътя си. Следователно, в този екстремален случай в т. C първо пристига тялото, движещо се по начупената линия ABC .



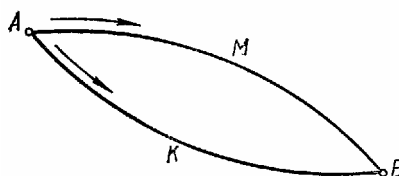
Фиг. 3.

И така, отговорът на поставения въпрос е: при малък наклон на равнината, първо в т. C пристига тялото, което се движи по начупената линия ABC . При голям наклон първо в т. C пристига тялото, движещо се по наклонената равнина. И тъй като няма съображения за това, че като функция от ъгъла на наклона α времената на двете движения имат минимума или максимуми, оттук следва съществуването на такъв ъгъл α_0 , при който двете тела достигат т. C едновременно. Количественото разглеждане на случая показва, че $\alpha_0 \approx 36,9^\circ$ (вж. файла I chast\4 prosto zadachi\zadacha 15).

Кой пристига с по-голяма скорост

В известния сборник на Тулчински с качествени задачи по физика⁹ под номер 273 се разглежда следната задача:

Тяло се хлъзга от т. A до т. B (фиг. 1): един път по дъгата AMB , втори път по дъгата AKB . Коефициентът на триене е един и същ. В кой случай скоростта на тялото в т. B ще бъде по-голяма?



Фиг.1.

Решението на автора е следното:

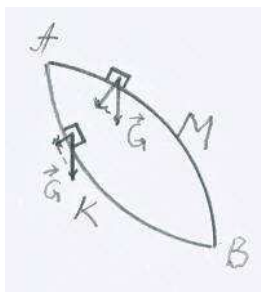
⁹ Тулчинский М. Е. Качественные задачи по физике в средней школе, М., Просвещение, 1972.

Скоростта на тялото в т. В зависи от триенето. Тъй като повърхността AMB е изпъкнала, а AKB – вдлъбната, силата на нормален натиск по AMB е по-малка отколкото по AKB . Следователно и силата на триене по AMB е по-малка отколкото по AKB . Ето защо и скоростта на тялото в т. В ще бъде по-голяма, когато то се хлъзга по кривата AMB .

Съмнения. Първо, съмнение поражда фактът, че в условието на задачата не се указва конкретният вид на кривите AMB и AKB . Означава ли това, че независимо от вида на траекториите, тялото винаги ще пристига с по-голяма скорост в т. В, ако се движи по **долната** крива? Разбира се, че не означава – ако дължината на кривата AMB е достатъчно голяма, въпреки че нормалният натиск по нея е по-малък, може да се окаже, че работата на триенето по нея е по-голяма отколкото по AKB .

Ето защо, основавайки се на фиг.1, оттук нататък ще смятаме, че според автора на задачата AMB и AKB са дъги от окръжности.

Второ, твърдението “силата на нормален натиск по AMB е по-малка отколкото по AKB ” звучи твърде глобално. В този вид то не е вярно – не е вярно, че по **цялата** крива AMB нормалният натиск е по-малък от нормалния натиск по AKB ! Лесно може да се съобрази, че има част от изпъкналата крива, в която нормалният натиск е **по-голям** отколкото на част от вдлъбнатата крива. Наистина, в началото на AMB нормалата е почти вертикална, докато в началото на AKB нормалата сключва с вертикалата значително по-голям ъгъл. Поради това проекцията на силата на тежестта $\vec{G}$ върху нормалата на изпъкналата дъга е **по-голяма** от проекцията върху вдлъбнатата дъга AKB (фиг. 2). От друга страна, върху тези участъци придобитата от тялото скорост е все още твърде малка, за да може наличието на нормално ускорение да направи нормалния натиск (и триенето) върху долната крива по-голям ($a_n = \frac{v^2}{R}$).

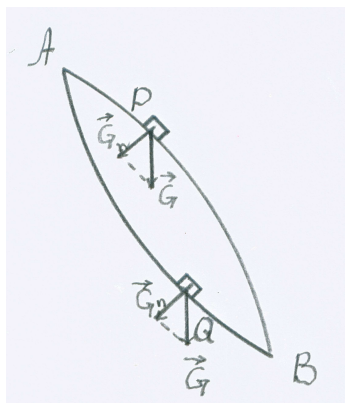


Фиг. 2.

Тези съмнения подкопават увереността в коректността на решението. По-долу представяме един по-конкретен вариант на условието, както и по-подробно решение, които вече отстраняват посочените съмнения.

27. Задача. Дъгите AMB и AKB принадлежат на окръжности с равни радиуси и лежат във вертикална равнина (фиг. 1). Тяло се хлъзга без начална скорост от т. А до т. В: един път по дъгата AMB , втори път по дъгата AKB . Коефициентът на триене е един и същ. В кой случай скоростта на тялото в т. В ще бъде по-голяма?

Решение. Нека дължините на дъгите AP и BQ са равни (фиг. 3). Интуитивно ясно е (а вероятно не е трудно и да се докаже), че нормалите към тангентите в т. Р и в т. Q са успоредни. Следователно проекциите G_n на теглото $\vec{G}$ върху тези нормали се равни.



Фиг. 3.

Когато тялото се намира в т. P от горната, изпъкналата дъга, част от нормалния натиск осигурява центростремителната сила, необходима за движение на тялото по външната страна на дъгата от окръжност (ако проекцията G_n е твърде малка, за да осигури на тялото ускорение $a_n = \frac{v^2}{R}$, то няма да стигне т. B по дъгата AMB , а просто в определена точка ще излети по тангентата). Ето защо нормалният натиск N_P , който тялото оказва върху дъгата и от който зависи триенето, е по-малък от G_n , т.е.

$$(1) \quad N_P < G_n.$$

Когато тялото се намира в т. Q , движейки се по вътрешната страна на вдлъбнатата дъга, центростремителното ускорение на тялото се осигурява от нормалната реакция на дъгата. Съгласно с третия принцип на динамиката със същата по големина сила тялото действа върху дъгата и в този случай тази сила е еднородна с нормалната компонента на теглото. В този случай тя се **добавя** към G_n , така че нормалният натиск N_Q , който определя триенето, е по-голям от G_n , т.е.

$$(2) \quad N_Q > G_n.$$

Тъй като в (1) и (2) G_n е едно и също (съгласно с избора на т. P и т. Q), от тези неравенства следва:

$$(3) \quad N_P < N_Q.$$

Оттук вече следва, че триенето в т. P ще бъде по-малко отколкото в т. Q , а работата на триенето по един елементарен участък около т. P ще бъде по-малка от съответната работа по участък около т. Q със същата дължина.

Понеже двете дъги може да се разглеждат като съставени от голям брой двойки участъци, за които е валидно изказаното по-горе твърдение, следва, че и цялата работа на триенето по дъгата AMB ще бъде по-малка отколкото по дъгата AKB . Оттук, разбира се, следва заключението, че движейки се по изпъкналата дъга, тялото ще пристигне в т. B с по-голяма скорост, отколкото ако се движи по вдлъбнатата (долната) дъга.

Лов на маймуни

Една класическа задача, която илюстрира принципа на независимост на движенията е следната.

28. Задача. Ловец се цели в маймуна, която виси на клона на далечно дърво. Той знае, че щом чуе изстрела, маймуната от уплаха ще пусне клона. Къде следва да се цели ловецът: под, над или в маймуанта, за да попадне куршумът в целта?

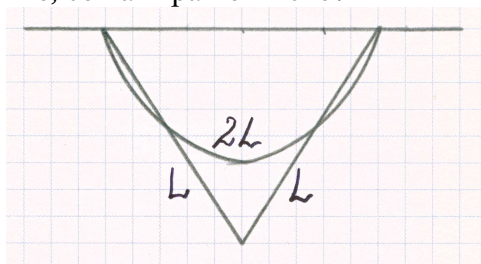
Решение. Тъй като движенията на куршума и на маймуната започват едновременно, във всеки момент преместванията им във вертикална посока, предизвикани от силата на тежестта, са равни. Затова ако ловецът насочи оръжието към маймуната, в

момента, в който куршумът измине хоризонталното разстояние до дървото, той ще срещне целта.

Разбира се, задачата допуска и количествено решение, което обаче не внася нищо ново.

Център на масите на верижка и на пръчки

29. Задача. В две точки, които се намират върху хоризонтална права, са окачени краищата на: а) еднородно въже с дължина $2L$ и б), система от две еднакви еднородни пръчки, всяка от които има дължина L (фиг. 1). Чий център на масите (ЦМ) – на въжето или на системата от пръчките, се намира по-ниско?



Фиг. 1.

Решение. Решението се опира на факта, че всяка статична система се стреми да заеме положение с минимална гравитационна потенциална енергия. Известно е също, че близо до земната повърхност гравитационната потенциална енергия на една система е толкова по-малка, колкото по-ниско е нейният ЦМ.

Представете си, че хванете и опънете надолу средата на въжето – нейната форма и положение ще съвпадат с положението на системата от двете пръчки (дължините им са равни!). В този случай очевидно **съвпадат** и техните ЦМ. Освободете въжето – то, без въздействие на външни фактори, приема началната си форма. По силата на цитирания по-горе факт заключаваме, че въжето е преминало в състояние с по-малка потенциална енергия, т.е. – неговият ЦМ е **слязъл по-ниско**.

И така, в началното положение по-ниско се намира центърът на масите на въжето.

Надпревара на бутилки

30. Задача. От една и съща височина едновременно започват да се търкалят по наклонена равнина две еднакви бутилки, едната пълна с вода, другата – празна. Коя от бутилките ще достигне първа края на наклонената равнина, ако и двете се търкалят без хлъзгане? Коя от двете бутилки ще достигне по-голяма височина, ако от едно и също място им бъдат придадени еднакви начални скорости нагоре по равнината?

Решение. Ако празна бутилка с маса m се хлъзга без триене по наклонената равнина от височина h (т.е. – без да се търкаля), в края на равнината цялата ѝ начална потенциална енергия mgh се превръща в кинетична енергия на *постъпателното* движение. Крайната ѝ скорост $v = \sqrt{2gh}$, разбира се, не зависи от масата на бутилката.

Когато празна бутилка се търкаля, част от началната потенциална енергия се превръща в енергия на въртенето. Ето защо, когато тя се спусне от височина h , енергията на постъпателното ѝ движение ще бъде по-малко от mgh , а значи и скоростта на това движение по-малко от $v = \sqrt{2gh}$.

Когато търкалящата се бутилка е пълна с вода, поради малкото триене между стените на бутилката и течността водата почти не участва във въртенето – може да при-

емем, че тя се движи само постъпателно. В този случай, ако масата на водата е M , относително по-малка (в сравнение с празната бутилка) част от началната потенциална енергия $(M+m)gh$ се превръща в енергия на въртенето и следователно частта, която се превръща в кинетична енергия на постъпателното движение – по-голяма. Оттук и заключението, че крайната скорост на постъпателното движение в този случай ще бъде по-голяма, отколкото в случая, когато бутилката е празна.

Следователно пълната бутилка ще изпревари празната.

За да отговорим на втория въпрос, мислено ще обърнем движението – ще си представим, че двете бутилки са търкулнати със скоростите, които са придобили при спускането, нагоре по равнината. Очевидно е, че те ще достигнат една и съща височина – тази, от която са били пуснати в началото. Но щом празната бутилка, търкулната нагоре с по-малка скорост от пълната, се издига до една и съща височина с нея, ако двете бутилки бъдат търкулнати с еднакви скорости, очевидно е, че празната ще се издигне на по-голяма височина.

Принцип на непрекъснатостта

Съществува една класическа качествена задача, решението на която се опира на математическия *принцип на непрекъснатостта* и изисква не толкова познаване на физиката, колкото способност за разсъждаване.

Задача 31. От местността Паниците край Калофер в 8 часа сутрин към връх Ботев тръгва турист и след 6 часа достига целта. Там той преспива¹⁰ и на другата сутрин, отново в 8 часа тръгва обратно по същия маршрут. Докажете, че по пътя му има такова място, където на отиване е бил в същия час, минута и секунда предишния ден.

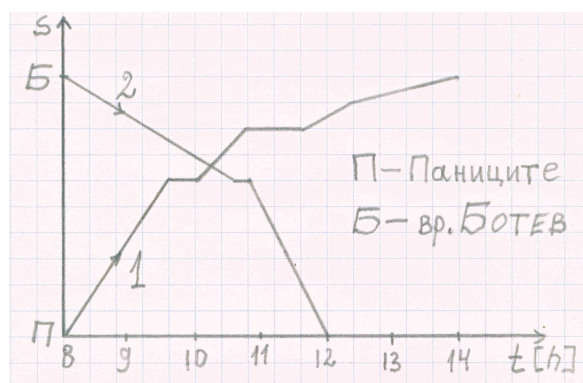
Анализ. Единственото, което се знае със сигурност за движенията нагоре и надолу е, че имат обща траектория и, че началото им е в един и същи час. Характерът на движенията е напълно произволен: те са с различни и, изобщо казано, непостоянни скорости. Може да се предполага, че средната скорост при изкачване е по-малка, отколкото при слизване, че и в двете посоки туристът е правил произволен брой почивки с произволна продължителност и т.н.

Това е типична задача за **доказване на съществуване**. Оскъдните данни за характера на движенията изключват възможността да се търси на какво разстояние от върха се намира въпросната точка и в кой момент туристът я достига на отиване и на връщане.

Решение. Един от елегантните начини за доказателство на съдържащото се в условието твърдение изисква да си представим, че втория ден, точно в 8 часа от Паниците по същия маршрут нагоре започва да се изкачва друг турист, като неговият “закон за движение” (т.е. неговата моментна скорост, началото и продължителността на почивките му и т.н.) е точно копие на закона за движение на първия турист от предишния ден. Очевидно е, че двамата туристи непременно ще се срещнат – те се движат един срещу друг по една и съща траектория! Мястото на тази мислена среща е търсената точка, в която първият турист при слизване ще се окаже в същия час, минута и секунда от денонощието, в които е преминал през нея и на изкачване предишния ден, с което съществуването на такава точка е доказано.

Коментар. За да поясним какво отношение има тази задача към математичния принцип за непрекъснатост е добре да илюстрираме решението ѝ графически. На фиг. 1 по хоризонталната ос е нанесено времето за движение, а по вертикалната ос – дължината на изминатия път от т. П (м. Паниците) до съответния момент време.

¹⁰ Преди години спането на върха бе възможно – в старата метеорологична станция.

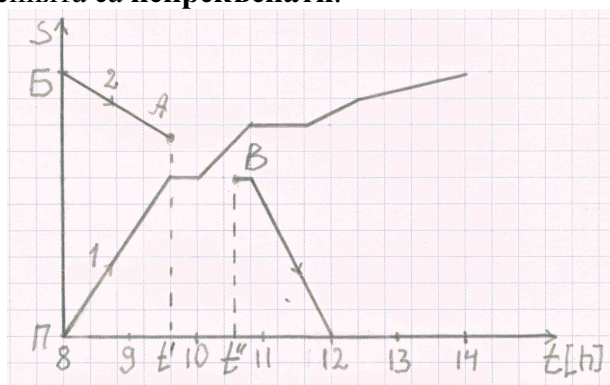


Фиг. 1.

Кривата 1 е примерна графика на изминатия от туриста път в зависимост от времето *при изкачване*, т.е. това **не е** траектория на движение. Ако я проследите по-детайлно ще разберете къде пътят е бил по-стръмен (и скоростта – по-малка), кога туристът е правил почивки и т.н.

Кривата 2 е графика на изминатия от туриста път в зависимост от времето *при слизване* от върха. Според условието на задачата, тази крива започва от върха в същия час, в който е започнало изкачването предишния ден. И тъй като слизането обикновено става с по-голяма средна скорост, то и моментът в който туристът слиза в Паниците е по-ранен от момента, когато предишния ден е достигнал върха.

Това, че двете криви имат пресечна точка, е графичен израз на казаното с думи в решението. И в двата случая използваме неявно факта, че **движението е непрекъснато**. Какво би могло да се случи, ако движенията нямат това свойство? Би могло, например, да се случи това, което е изобразено на фиг. 2. На нея движението на туриста при слизване в момента t' *се прекъсва* в т. А, след което в момент t'' се възстановява, но в друга точка – в т. В. В този случай вече няма час и минута, в които и на отиване, и на връщане туристът да е бил на едно и също място. Разбира се, подобна ситуация е невъзможна, именно защото движенията са **непрекъснати**.



Фиг. 2.

Последното твърдение е като че ли излишно категорично – в микросвета, където са валидни законите на квантовата механика, нещата стоят по друг начин. За щастие, туристите са макрообекти и за описание на техните движения класическите представи са напълно подходящи.

Никаква физика

Има задачи, чието решение освен способност за логично разсъждаване не изисква познаване на никакви физични закони. Въпреки това те често се срещат в сборници с физични задачи. Една класическа задача от този тип е следната.

Задача 32. В два съда с обем от по два литра са налети съответно един литър вода и един литър спирт. Чаша с обем 100 ml се пълни с вода от първия съд и се излива във втория. След разбъркване 100 ml от сместа с помощта на чашата се връща в първия съд и също се разбърква. Тази операция се повтаря общо 10 пъти. Въпросът е: в края на процеса кое е повече: водата във втория съд или спиртът в първия?

Пояснение: При решаване на задачата се пренебрегва фактът, че обемът на смес от вода и спирт е малко по-малък от сбора на обемите на течностите преди смесването.

Решение. Това е типичен пример за задача, в чието условие която има излишни данни (“за заблуда на противника”, както казват военните): в случая не е важно какви са обемите на съдовете и чашата, нито колко са началните количества вода и спирт, нито това, че тези количества са равни, нито колко пъти е прехвърляна течност от единия съд в другия и обратно. Споменаването на числа като *1 литър*, *100 милилитра* и пр. само подтикват човек да вземе молив и лист и да започне да пресмята!¹¹ Всъщност един-ственият важен факт е, че след последното преливане обемът на течността във всеки от двата съда е равен на обема ѝ преди началото на операциите. А оттук веднага следва и решението: щом обемът на течността в първия съд след последното прехвърляне е точно, колкото е бил обемът на водата в началото, следва, че прелятата във втория съд вода е била заместена с точно такъв обем спирт. И така, отговорът е: водата във втория съд е точно толкова, колкото спиртът в първия.

Продължението на Смълиан. В една своя книга¹² Реймънд Смълиан предлага усложнение на задачата: *Да се докаже, че след произволно голям, но краен брой двойни преливания, концентрациите на спирта в двата съда не може да се изравнят. (При условие, че в нито един момент някой от съдовете не се окаже празен. Това условие е излишно, ако преливането се извършва с чаша, както е указано в началната задача.)*

Доказателство. Да означим съда със спирт с *A*, а съда с вода – с *B*. Очевидно е, че след първото двойно преливане (спирт от *A* в *B* и същото количество смес от *B* обратно в *A*), концентрацията на спирта в *A* е по-висока от концентрацията му в *B*. Да допуснем, че и след *n*-тото двойно преливане това съотношение е запазено. Тогава при следващото преливане ние вземаме от *A* смес с по-висока концентрация на спирта и я добавяме в *A*, където концентрацията на спирта е по-малка. След размесването концентрацията на спирта в *B* се повишава, но не може да стане равна или по-голяма от тази в *A*, защото смесването на течности с различни концентрации дава смес с някаква междинна концентрация. Следователно, връщайки съответното количество смес от *B* в *A*, ние добавяме към смес с по-голяма концентрация друга, с по-малка концентрация. След смесването на течността в *A* концентрацията на спирта там намалява, но по същата логика не може да стане равна или по-малка от концентрацията в *B*.

Така доказваме, че и след $(n+1)$ -вата стъпка концентрацията на спирта в *A* е по-голяма от тази в *B*. С това задачата на Смълиан е решена по метода на математичната индукция.

Продължението на Гарднър. Известният американски популяризатор на математиката Мартин Гарднър в една своя книга¹³ публикува продължението на Смълиан, но получава от свой читател писмо със следното съдържание:

Сър,

Вашето решение на задачата за смесване на вино и вода явно игнорира физическата природа на разглежданите обекти. Когато от смес на две течности се взема

¹¹ Решете задачата и количествено при само едно двойно преливане, т.е., когато прехвърлите 100 ml вода в спирта и след това върнете 100 ml смес във водата. Не се надявайте да получите решение от само няколко реда.

¹² Смълиан Р. М. *Как же се нарича тази книга?*, М, “Мир”, 1981.

¹³ Гарднър М. *Математическите головоломки и развлечения*, М., “Мир”, 1971.

проба, то относителното количество на една от течностите в пробата ще се различава от относителното ѝ количество в сместа. Отклонението от “правилното” относително количество ще бъде от порядъка на $\pm \sqrt{n}$, където n е броят на молекулите на интересуващата ни течност.

Следователно, съществува възможност концентрациите на виното в двата съда да се изравнят. Вероятността за изравняване на концентрациите става съществено различна от нула, след като разликата между концентрациите се намали до величина от порядъка на $\sqrt{n}$. За целта в случая¹⁴ е необходимо да се извършат само 47 двойни преливания.

По този начин, с отчитане на дискретния строеж на веществата, т.е. – на наличието на молекули, се оказва, че твърдението на Съмълиан не е вярно.

¹⁴ Гарднър разглежда случая, в който началните количество на двете течности са по 10 ml, а при всяко преливане се прехвърлят 3 ml от единия съд в другия.