Лекция 4

Методи за анализ на електрически вериги

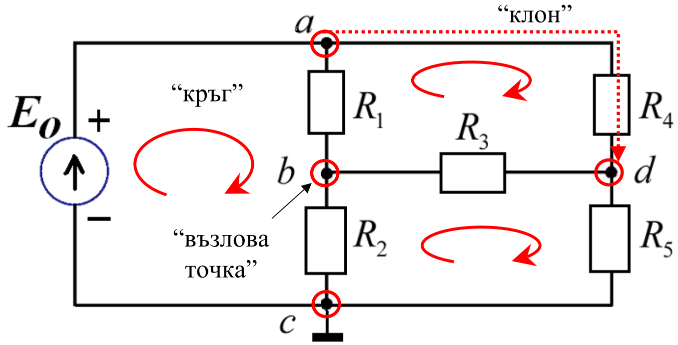
Съдържание на Лекция 4

- **Методи за анализ на електрическите вериги**
  - 4.1 Анализ на електрически вериги. Принципи на съвременните схемни симулатори.
  - 4.2 Най-известните аналитични методи за линеен анализ на постояннотокови вериги: директен метод на Кирхоф, метод на кръговите токове, метод на възловите напрежения, метод на суперпозицията и метод на еквивалентните схеми.
  - 4.3 Комплексен метод за анализ на променливо-токови електрически вериги с хармонични сигнали. Комплексен импеданс и адмитанс.
  - 4.4 Операторен метод за анализ на променливо-токови електрически вериги в преходен режим. Примери.
  - 4.5 Анализ на вериги с нелинейни елементи – основни принципи

Лекция 4

4.1 Анализ на електрически вериги. Принципи на съвременните схемни симулатори

Понятия в сложни електрически вериги

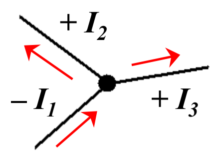


При изобразяване на сложни електрически вериги се срещат следните понятия:

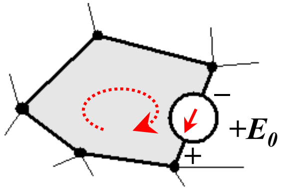
- “Клон” (branch) – част от ел. верига, в която тече един и същи ток I_i (ток между 2 възлови точки) с определена посока;
- “Възел (възлова точка, node)” – точка на свързване на 3 и повече клона, която има свой потенциал φ_j*. Потенциалът само в 1 възел може условно да се приеме за “нулев” (“заземяване”) и тогава за останалите възлови точки се дефинира възлово напрежение U_j*
- “Токов кръг (контур, loop)” – съвкупност от клонове, образуващи затворена верига, която има начало и край в една и съща възлова точка. За всеки кръг може да се дефинира кръгов ток I^c_k; това не е фактическият ток/токове в клонове на кръга, но всеки ток в даден клон може да се определи от кръговия ток при анализа на схемата (вж. по-нататък).

Правила за знаците на dc токовете и напреженията

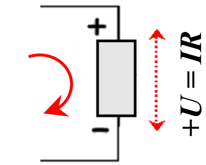
Токовете ***I*** и напреженията (на източниците ***E*** (ЕДН) и падовете на напрежение върху съпротивленията ***U = IR***) имат свои знаци. За да е верен анализът на веригите, трябва да се спазват определени правила за знаците на токовете и напреженията. Предложените тук правила са условни и важат с правилата за анализ, разгледани в лекцията.



токове във възел



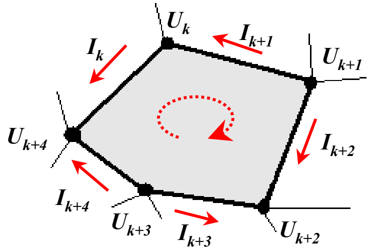
контур и ЕДН



пад на напрежение

- ❖ Правила за знаците на токовете във възлите: излизащите (изтичащите се) от възела токове – със знак "+"; влизащите (втичащите се) към възела токове – със знак "–".
- ❖ Посока на обикаляне в контур: може да бъде по посока на часовниковата стрелка или обратно, но не трябва да се сменя по време на анализа.
- ❖ Правила за знаците на ЕДН на източниците: ЕДН се взема с положителен знак, ако посоката на напрежението или тока на генератора на напрежение или ток съвпада с посоката на обикаляне в контура. Напрежението се определя спрямо точката "земя".
- ❖ Правила за знаците на падовете на напрежение: падът на напрежение е с положителен знак, ако при обикалянето по контура най-напред се среща + полюс на елемента.

Какво е анализ на електрическа верига?



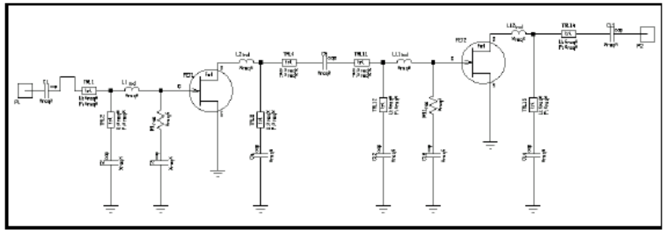
Част от анализирана верига

Да се проведе анализ на дадена електрическа верига (схема) означава да се определят токовете във всеки клон или напреженията във всяка възлова точка. Това е пълен анализ, но той не винаги е необходим. Много по-често се налага да се проведе частичен анализ – само на определени важни части на схемата. Най-често се налага анализ на входа изхода на веригата – коефициенти на предаване по ток и напрежение.

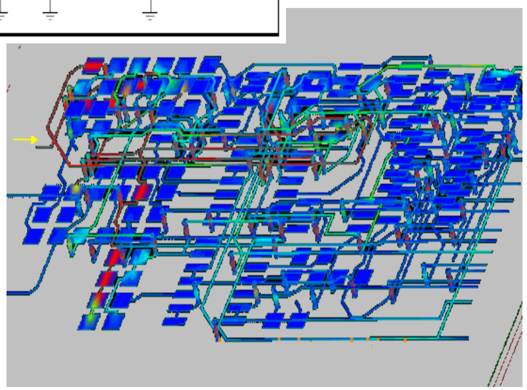
Можем да класифицираме следните случаи на анализ на вериги по различни признаци:

- ❖ Постояннотоков и променливотоков анализ. Първият се извършва за схеми с *dc* сигнали ($f = 0$), а вторият – за схеми с *ac* (*RF*) сигнали ($f \neq 0$). Важно е да се отбележи, че двата типа анализ могат да се извършват поотделно и независимо един от друг за една и съща схема, но трябва да се съобразяват известни правила да няма взаимодействие между постояннотоковия и променливотоковия режими.
- ❖ Линеен и нелинеен анализ. Първият се извършва за схеми само с линейни елементи и в линеен режим на сигналите (за слаби сигнали), а вторият – при нелинейни елементи и при силен сигнал
- ❖ Аналитичен и числен (симулационен) анализ. Първият се извършва чрез аналитични методи по установени закони и теореми (използва се в настоящия курс), а вторият – чрез числени методи и с помощта на схемни моделни симулатори на вериги (вж. надолу)

Анализ с помощта на схеми и структурни софтуерни симулатори

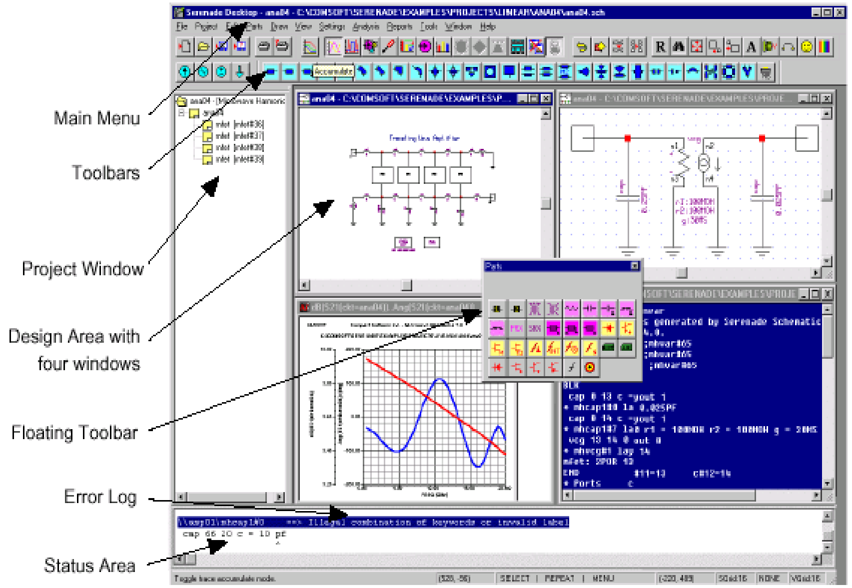


⇐ Анализ чрез т. нар. "схемни" симулатори – схемите се състоят от моделни елементи, които се анализират по известните закони на електромагнетизма

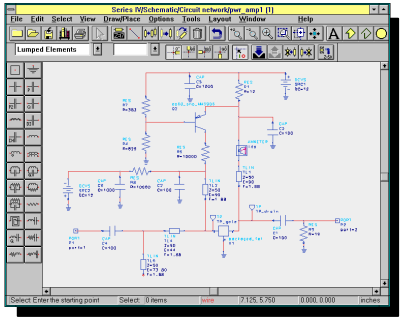


Анализ чрез т. нар. "структурни" електромагнитни симулатори – схемите се състоят от свързващи линии и електродинамични елементи моделни елементи, които се анализират по вълновите методи на електродинамиката ⇒

Пример за схемен симулатори (Ansoft® Serenade)

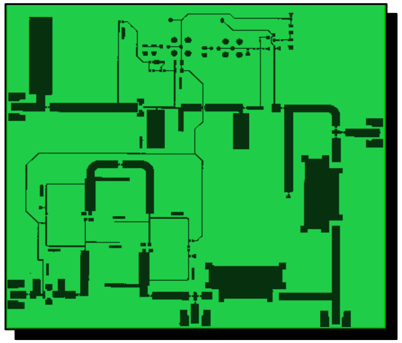


Пример за CAD и CAM форма на схемата

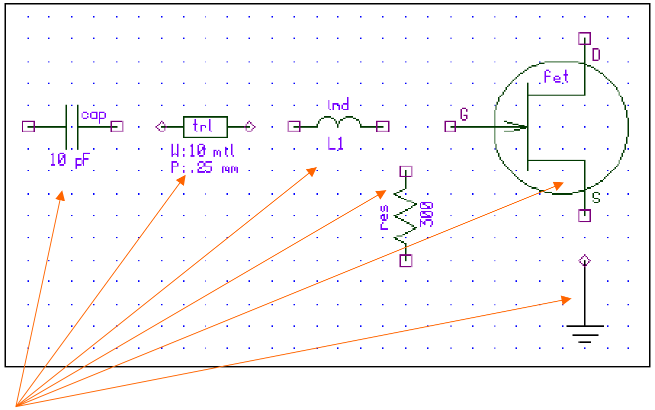


CAD форма (Computer-Aided Design) на електронната схема – за анализ и проектиране

CAM форма (Computer-Aided Manufacturing) на изображението на електронната схема – при производството на платката и нейното “насищане” с елементи

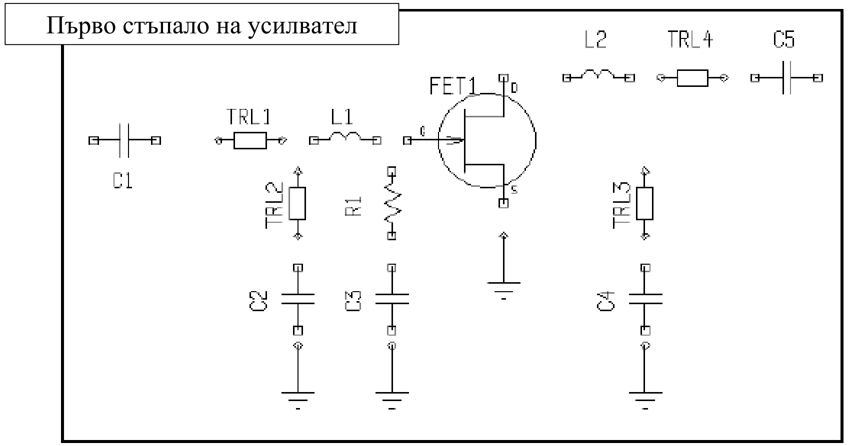


Илюстрация: синтез на произволна електрически верига с дискретни елементи



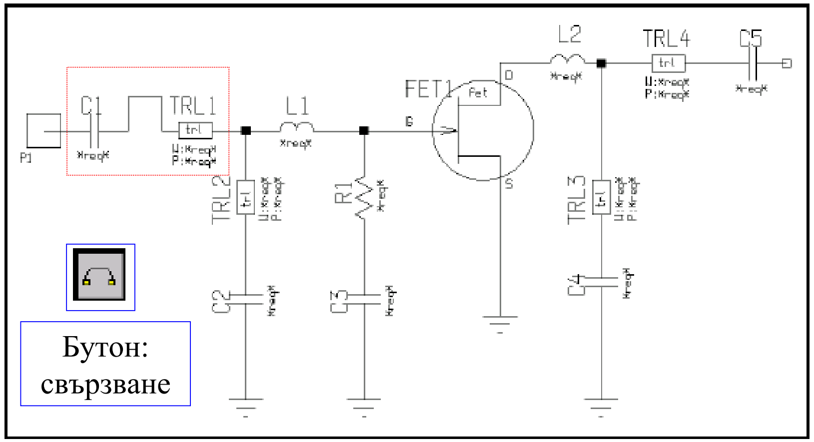
Елементи, представени със своите модели (линейни или нелинейни), които са вградени в библиотеката на схемния симулатор или са създадени от самия потребител

Илюстративен пример: анализ на двустъпален усилвател. Начало: редактиране на елементите на веригата



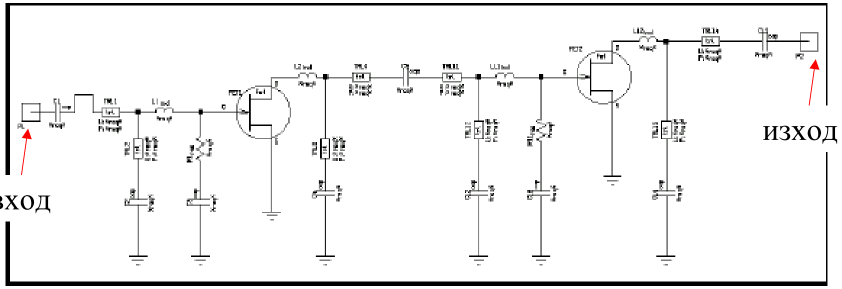
Елементите се селектират (избират се и се включват в схемата поотделно) и се после се редактират (избират се техните параметри – задължителни и препоръчителни).

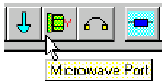
Свързване на елементите на веригата



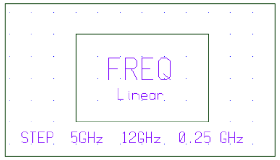
Курсорът се поставя на края на даден елемент (C1); кликва се с ляв бутон на мишката; курсорът се придвижва до началото на следващия елемент (TRL1) и отново се кликва се с ляв бутон – връзката е готова.

Копиране на второто стъпало и поставяне на входове (ports)



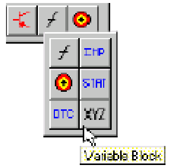


Поставяне на високо-честотни входове

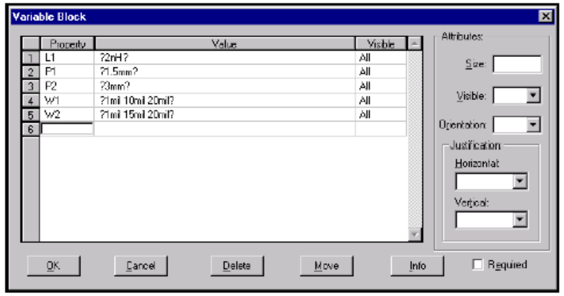


Задаване на честотния обхват за линейна симулация

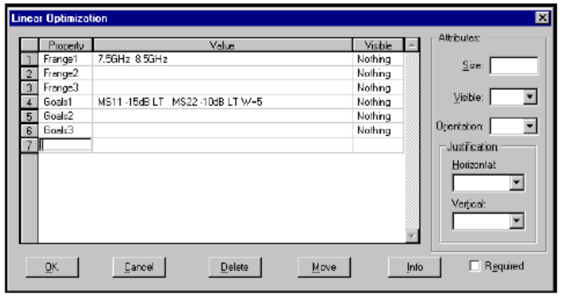
Задаване на интервали на променливите и оптимизация



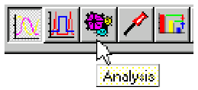
Интервали от стойности на параметрите

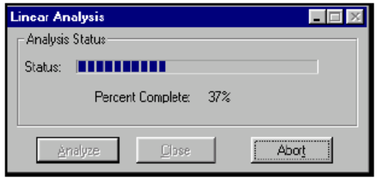


Условия за оптимизацията (Z- или S-параметри, усилване, изходна мощност и пр.)

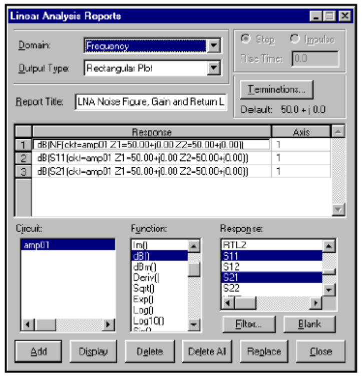


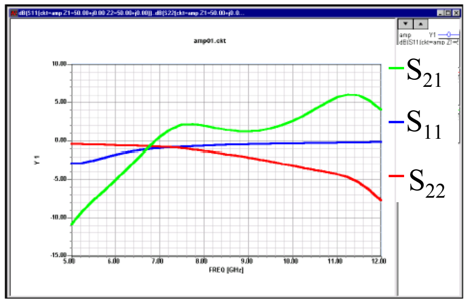
Стартиране на линейна симулация на веригата



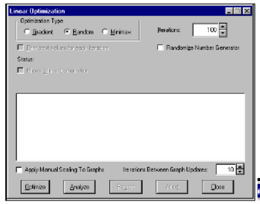


Резултати от симулацията





Оптимизация на параметрите на усилвателя в честотен обхват



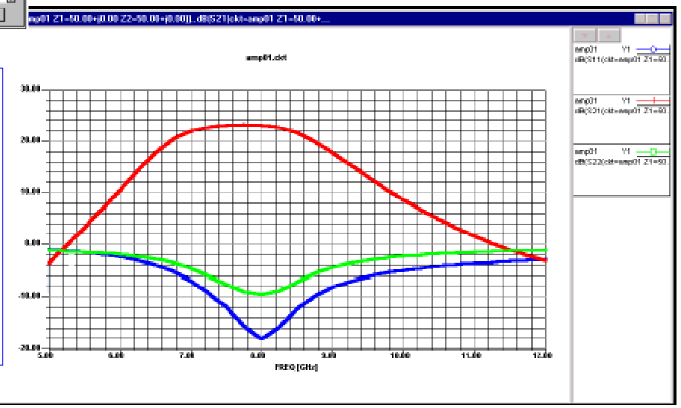
Оптимизация по променливите параметри

L1, nH;

P1, W1, mm;

P2, W2, mm

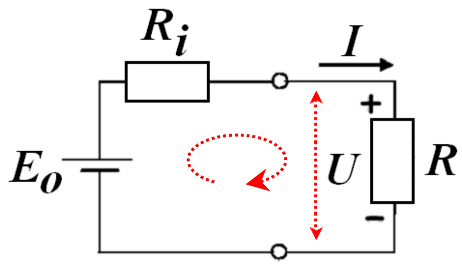
100 итерации



Лекция 4

4.2 Най-известните аналитични методи за линеен анализ на постояннотокови вериги

Връзка между параметрите в прости вериги



Най-простата електрическа верига се състои от един клон и един кръг и няма възлови точки (вж. примера горе). Връзката между тока $\boldsymbol{I}$ и напреженията – на източника $\boldsymbol{E_0}$ и пада на напрежение върху съпротивлението $\boldsymbol{U = IR}$ се дава със закона на Ом за цялата верига.

$$E_0 = I(R+R_i) = IR + IR_i = \sum_i U_i$$

$$E_0 = IR = U \;\Big|_{R_i=0}$$

Може да се заключи, че ЕДН на източника е равно на сумата от падовете върху двете съпротивления (на консуматора и вътрешното съпротивление на източника) (вж. общият закон по-нататък). В частния случаи на идеален източник връзката е най-проста.

Закони на Кирхоф в сложни вериги

Нека да разгледаме сложна електрическа верига с $\boldsymbol{p}$ клона, $\boldsymbol{q}$ възела и $\boldsymbol{r}$ кръга (контура). Неизвестни са токовете I_k в отделните клонове ($\boldsymbol{p}$ на брой). Връзката между тези токове и останалите известни параметри във веригата (ЕДН и съпротивления) се дава със законите на Кирхоф за постояннотокови вериги.

- <u>I закон</u>: алгебричната сума на токовете в дадена възлова точка е равна на нула ("+" за излизащи и "–" за влизащи токове). $$\sum_k I_{jk} = 0;\ \forall j = 1 \div q$$
- <u>II закон</u>: за всеки токов кръг (контур) алгебричната сума на ЕДН на източниците е равна на алгебричната сума на падовете на напреженията (съгласно приетите правила за знаците).

$$\sum_k E_{ik} = \sum_k U_{ik} = \sum_k I_{ik}R_{ik}; \qquad \forall i = 1 \div r$$

Законите на Кирхоф се използват при анализа на сложни вериги по следния начин:

Броят на неизвестните токове е $\boldsymbol{p}$. Броят на уравненията, получени от I тип закони на Кирхоф, са $\boldsymbol{q}$, но линейно-независими са $\boldsymbol{q-1<p}$. От II тип закони на Кирхоф, се получават още $\boldsymbol{r}$ уравнения, но не всички са линейно независими. Така от общо $(\boldsymbol{q+r})$ се отделят $\boldsymbol{p}$ линейно-независими уравнения за $\boldsymbol{p}$ неизвестни тока. Следователно, задачата за анализ на сложни схеми е решима.

$$p\left\{\begin{array}{cccccc} * & * & * & * & = & \# \\ * & * & * & * & = & \# \\ * & * & * & * & = & \# \\ * & * & * & * & = & \# \end{array}\right.$$

$$(q+r)-p\left\{\begin{array}{cccccc} * & * & * & * & = & \# \\ * & * & * & * & = & \# \end{array}\right.$$

Закони на Кирхоф в променливотокови сложни вериги

Законите на Кирхоф могат да се обобщят и за сложни променливотокови вериги в установен режим. Нека отново да разгледаме сложна електрическа верига с $\boldsymbol{p}$ клона, $\boldsymbol{q}$ възела и $\boldsymbol{r}$ кръга (контура). Неизвестни са $\boldsymbol{p}$ на брой токове i_k в отделните клонове. Различното е, че сега те зависят от времето (периодични функции) (както и ЕДН на източниците e_k). Друга разлика е наличието на нови типове пасивни елементи (освен съпротивленията R_k): кондензатори с капацитети C_k и бобини с индуктивности L_k Сега законите на Кирхоф се записват за токовете и падовете на напрежения в даден момент, като важат във всеки момент от времето, а сумите са векторни (вж. подробности – в част 4.3 на лекциите).

- <u>I закон</u>: $$\sum_k i_k = 0$$
- <u>II закон</u>: $$\sum_k e_k = \sum_k \left[L_k \frac{di_k}{dt} + R_k i_k + \frac{1}{C_k}\int i_k dt \right]$$

Вторият тип закони на Кирхоф сега са комплексни интегро-диференциални уравнения за променливите токове i_k. Със замяна $i_k \to i^*_k$ и ако R_k,C_k и L_k не зависят от времето, законите на Кирхоф се се получават лесно решими диференциални уравнения от 2 ред за токовете.

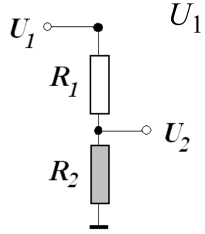
$$i_k^* \Rightarrow \int i_k dt \qquad\qquad \sum_k e_k = \sum_k \left[L_k \frac{d^2 i_k^*}{dt^2} + R_k \frac{di_k^*}{dt} + \frac{1}{C_k} i_k^* \right]$$

Примери за използване на законите на Кирхоф (1)

Ще дадем примери за прилагане на законите на Кирхоф в три относително прости случая.

1. Първият пример се отнася до делителите на напрежение и ток.

Делител на напрежение

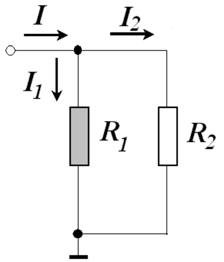


$U_1 \to U_2$

$$U_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} U_1 = $$

$$= \frac{1}{1 + R_1 / R_2} U_1$$

Делител на ток



$I \to I_1$

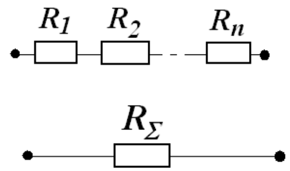
$$I = I_1 + I_2$$

$$I_1 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} I = \frac{1}{1 + R_1 / R_2} I$$

Примери за използване на законите на Кирхоф (2)

2. Вторият пример е за определяне на формули за последователно (серийно) и успоредно (паралелно) свързване на различни пасивни елементи: съпротивления, кондензатори и бобини.

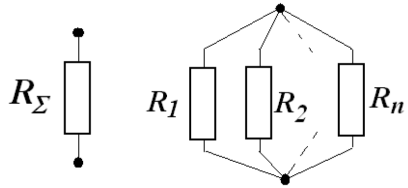
Последователно свързване



$$R_\Sigma = \sum_i^n R_i \qquad L_\Sigma = \sum_i^n L_i$$

$$\frac{1}{C_\Sigma} = \sum_i^n \frac{1}{C_i}$$

Успоредно свързване



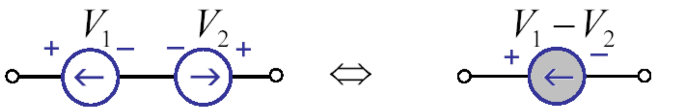
$$\frac{1}{R_\Sigma} = \sum_i^n \frac{1}{R_i} \qquad \frac{1}{L_\Sigma} = \sum_i^n \frac{1}{L_i}$$

$$C_\Sigma = \sum_i^n C_i$$

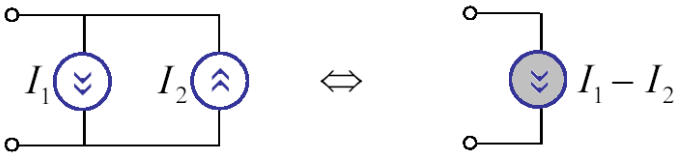
Примери за използване на законите на Кирхоф (3)

3. Третият пример е за свързване на генератори на ток и напрежение

Последователно свързване на генератори на напрежение



Успоредно свързване на генератори на ток



Основни методи за анализ на сложни електрически вериги: Метод на Кирхоф

❖ Метод на Кирхоф: Това е метод, базиращ се на директно прилагане на законите на Кирхоф. Неизвестни са токовете в отделните клонове I_k. Броят на неизвестните е $\boldsymbol{p}$ и с общо $\boldsymbol{q - 1}$ линейно-независими уравнения на Кирхоф от I тип, допълнени с $\boldsymbol{p - q + 1 < r}$ линейно-независими уравнения на Кирхоф от II тип, се получават необходимите $\boldsymbol{p}$ линейно-независими уравнения за $\boldsymbol{p}$ неизвестни тока. Така се формира система от $\boldsymbol{p}$ линейни алгебрични хомогенни уравнения за токовете със ненулеви свободни членове. Решенията на тези уравнения се получават по правилото на Крамер:

$$I_j = \frac{\Delta_j}{\Delta}$$

където Δ е детерминантата от ранг $\boldsymbol{p}$ на матрицата на коефициентите пред неизвестните токове, а Δ_j е т.нар адюнгирано количество – детерминантата от ранг $\boldsymbol{p}$ на матрицата на коефициентите пред неизвестните токове, чийто j стълб е заменен със стълба на свободните членове.

Това е най-директният метод, но с най-голям брой неизвестни и с най-голям брой алгебрични пресмятания – $\boldsymbol{p}$ на брой.

Вж. решеният пример по-нататък.

Метод на кръговите токове

- Метод на кръговите токове (метод на Максуел): Това е много популярен метод, базиращ се на нов тип уравнения, изведени от уравненията на Кирхоф. Тук се въвеждат и нов тип неизвестни – кръгови токове I^c_j във всеки токов контур ($\forall j = 1 \div r$). Техният брой е по-малък от предишния случай: $\boldsymbol{r - 1 < p}$. Прилагат се следния тип уравнения:

$$\sum_k E_{jk} = I_j^c \left(\sum_k R_{jk} \right) + \sum_n R_{jn} I_n^c; \quad \forall j = 1 \div r$$

Във формулата алгебричното сумиране по k се извършва за всички ЕДН и всички налични съпротивления в дадения токов контур j. Знаците на ЕДН E_{jk} се избират в зависимост от посоката на обикаляне в контура j (т. е. спрямо посоката на тока I^c_j).

Алгебричното сумиране по n се извършва за всички *съседни контури* на токовия контур j. Следователно, в тази сума влизат само т. нар. взаимни съпротивления R_{jn}, т. е. съпротивленията в общите клонове на дадения контур j и съседния му контур n. Знакът на съседния кръгов ток I^c_n се избира в зависимост от знака на основния кръгов ток I^c_j – ако са в една посока "+", ако са в различни посоки "–".

Получената система уравнения е с по-нисък ранг ($\boldsymbol{r - 1}$) и аналитично се решава по-лесно. Прилага се същата техника, както при метода на Кирхоф – правилото на Крамер, но този път за неизвестните кръгови токове.

Неизвестните токове в отделните клонове могат да се получат от вече определените кръгови токове – вж. решеният пример по-нататък.

Метод на възловите напрежения

- Метод на възловите напрежения: Това е удобен метод, защото се работи с напрежения във възловите точки и аналитичното решение лесно може да се провери експериментално чрез измервания с волтметър, без да се прекъсва веригата. Този метод също се базира на нов тип уравнения, изведени от уравненията на Кирхоф. Тук неизвестните величини са възловите напрежения U^*_l във всяка възлова точка ($\forall l = 1 \div q$). Голямо удобство е фактът, че за една точка (но само за 1) потенциалът се избира нулев ("заземяване"), с което броят на неизвестните се редуцира до минимален: $\boldsymbol{q - 1 < p}$. Прилагат се следния тип уравнения:

$$\sum_k \frac{1}{R_{lk}} E_{lk} = U_l^* \left(\sum_k \frac{1}{R_{lk}} \right) - \sum_n \frac{1}{R_{ln}} U_n^*; \quad \forall l = 1 \div q - 1$$

Във формулата алгебричното сумиране по k се извършва за всички ЕДН и всички налични проводимости ($1/R_{lk}$) в клоновете, които имат обща точка във възела l. Знаците на ЕДН E_{jk} се избират в зависимост от близостта на даден полюс до възела, т. е. "+" за близост на положителния полюс и "–" за обратното. Тук има един проблем, ако източникът е идеален и в дадения клон няма включено съпротивление (т.е. $E_{lk}/R_{lk} \to \infty$). Тогава се постъпва така: добавя се крайно вътрешно съпротивление на източника $R_i \neq 0$ и затова отношението $E_{lk}/R_i \neq \infty$; веригата се анализира аналитично с това съпротивление $R_i \neq 0$ и накрая в получения израз се прави прехода $R_i \to 0$; задачата обикновено има решение.

Алгебричното сумиране по n се извършва за всички *съседни възли* на възела l. Така в тази сума влизат само т. нар. взаимни проводимости $1/R_{ln}$, т. е. отчитат се само съпротивленията в общите клонове между двете възлови точки j и n. Неизвестните токове в отделните клонове могат да се получат от вече определените напрежения – вж. решеният пример.

Други методи

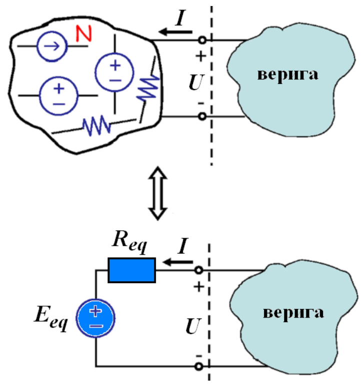
- Метод на суперпозицията: Това е известен физичен метод и се основава на възможността за сумиране на отделните линейни въздействия на всеки източник (при слаби сигнали). Може да се използва както аналитично, така и експериментално и е много удобен, когато се търси отделен ток само в един клон на веригата, без да се решават останалите.

  Принцип: Токът във всеки j-ти клон I_j от дадена верига е алгебрична сума от токовете I_{jk}, създадени в същия клон под действието на всеки отделен източник във схемата, като се изключат останалите, т.е. когато изходните им клеми се свържат "накъсо".

$$I_j = \sum_{k=1}^{N} I_{jk}$$

- Метод на еквивалентните схеми: Този метод ще бъде разгледан отделно в лекцията.

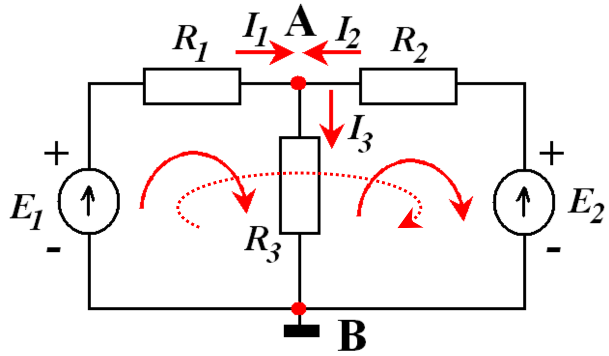
  Принцип: Част от дадена сложна електрическа верига може да се замени с електрически еквивалентна на нея проста верига, представена чрез еквивалентно напрежение U_{eq} (или ток I_{eq}) и еквивалентно съпротивление R_{eq} (вж. фигурата). При този принцип заместваната част от схемата остава "черна кутия" с неизвестна конкретна схема, но с известни общи параметри – еквивалентно напрежение/ток и съпротивление. Така може да се анализира останалата част от веригата при същите токове и напрежения.



Решен пример

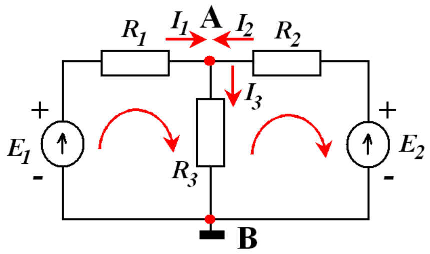
Ще разгледаме конкретен пример. Схемата има 3 клона, 2 възлови точки (едната от които, т. B, е заземена и 3 кръга (контура), от които само 2 са независими. Зададени са двата включени в схемата идеални източника на напрежение $E_{1,2}$ и трите съпротивления $R_{1,2,3}$. Неизвестни са трите тока $I_{1,2,3}$ в 3-те клона.

Задачата е да се определят аналитични изрази за неизвестните токове по всичките разгледани досега методи за анализ: директен метод на Кирхоф; метод на кръговите токове, метод на възловите напрежения, метод на суперпозицията и метод на еквивалентните схеми.



Пример 1: Директен метод на Кирхоф

Неизвестни са трите тока $I_{1,2,3}$ в 3-те клона. Зададени са: $E_{1,2}$ – ЕДН на 2 идеални източника на напрежение и три съпротивления $R_{1,2,3}$. Записваме 3 от уравненията на Кирхоф (1 от I тип и 2 от II тип) и получаваме следната линейна система от 3 уравнения за 3 неизвестни



$$\left\|\begin{array}{l} -I_1 - I_2 + I_3 = 0 \\ R_1 I_1 + 0 + R_3 I_3 = E_1 \\ 0 - R_2 I_2 - R_3 I_3 = -E_2 \end{array}\right.$$

Получава се следната система, записана в стандартния матричен вид

$$\left\langle\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ R_1 & 0 & R_3 & E_1 \\ 0 & R_2 & R_3 & E_2 \end{array}\right\rangle$$

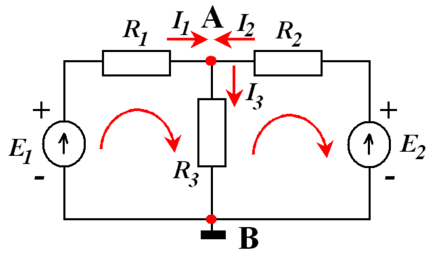
Определяме детерминантата на системата от 3-ти ранг

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ R_1 & 0 & R_3 \\ 0 & R_2 & R_3 \end{vmatrix} =$$

$$1.(-R_2 R_3) - 1.(R_1 R_3) - 1.(R_1 R_2) =$$
$$= -(R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1)$$

Пример 1 (прод.)

По правилото на Крамер определяме всеки един от неизвестни токове $I_{1,2,3}$ в 3-те клона:



$$I_j = \frac{\Delta_j}{\Delta},\ j = 1, 2, 3$$

$$I_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ E_1 & 0 & R_3 \\ E_2 & R_2 & R_3 \end{vmatrix}}{\Delta} =$$

$$= \frac{-1.(E_1 R_2) - 1.(E_1 R_3 - E_2 R_3)}{\Delta} = \frac{-E_1(R_2 + R_3) + E_2 R_3}{\Delta}$$

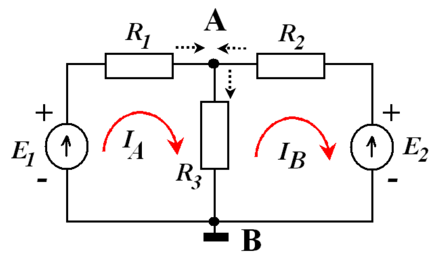
Аналогично:

$$I_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{E_1 R_3 - E_2(R_3 + R_1)}{\Delta}$$

$$I_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-E_1 R_2 - E_2 R_1}{\Delta}$$

Пример 2: Метод на кръговите токове

Неизвестни са двата кръгови тока $I_{A,B}$ в 2-та токови кръга. Записваме 2 от уравненията за този метод и се получава линейна система от 2 уравнения за 2 неизвестни:



$$\left\|\begin{array}{l} E_1 = I_A(R_1 + R_3) + (-I_B)R_3 \\ -E_2 = I_B(R_2 + R_3) + (-I_A)R_3 \end{array}\right.$$

или

$$\left\|\begin{array}{l} I_A(R_1 + R_3) - I_B R_3 = E_1 \\ -I_A R_3 + I_B(R_2 + R_3) = -E_2 \end{array}\right.$$

Определяме детерминантата на системата от 2-ри ранг (Δ е означение на детерминантата от предишния пример)

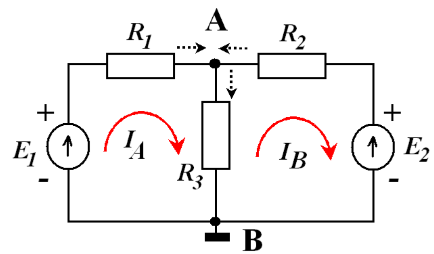
$$\Delta^c = \begin{vmatrix} R_1 + R_3 & -R_3 \\ -R_3 & R_2 + R_3 \end{vmatrix} =$$
$$= (R_1 + R_3)(R_2 + R_3) - R_3^2) =$$
$$= R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_3 R_2 + \cancel{R_3^2} - \cancel{R_3^2} =$$
$$= R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1$$
$$= -\Delta$$

Решенията на системата намираме по правилото на Крамер:

$$I_{A,B} = \frac{\Delta_{A,B}}{\Delta^c}$$

Пример 2 (прод.)

По правилото на Крамер определяме 2-та неизвестни кръгови тока $I_{A,B}$:



$$I_A = \frac{\Delta_A}{\Delta^c} = \frac{\begin{vmatrix} E_1 & -R_3 \\ -E_2 & R_2 + R_3 \end{vmatrix}}{\Delta^c} =$$
$$= \frac{E_1(R_2 + R_3) - E_2 R_3)}{\Delta^c}$$

Аналогично:

$$I_B = \frac{\Delta_B}{\Delta^c} = \frac{\begin{vmatrix} R_1 + R_3 & E_1 \\ -R_3 & -E_2 \end{vmatrix}}{\Delta^c} = \frac{-E_2(R_1 + R_3) + E_1 R_3)}{\Delta^c}$$

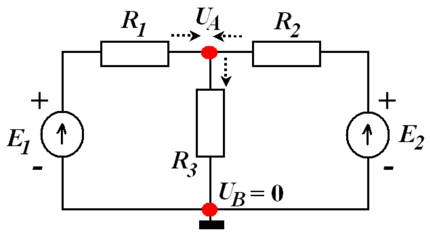
Истинските токове $I_{1,2,3}$ в 3-те клона могат да се определят от кръговите токове по представените по-долу връзки (може да се провери, че новите изрази за токовете в клоновете съвпадат с вече получените в предишния пример).

$$I_1 = I_A\ ; \quad I_2 = -I_B\ ; \quad I_3 = I_A - I_B$$

Пример 3: Метод на възловите напрежения

Новите неизвестни са възловите напрежения $U_{A,B}$ в т. A и т. B. Всъщност, схемата може да се "заземи" в т. B и тогава $U_B = 0$.

Следователно, остава само една неизвестна величина U_A, която може да се определи от израза по-долу



$$E_1 \frac{1}{R_1} + E_2 \frac{1}{R_2} =$$

$$= U_A \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) - \frac{1}{R_3} U_B \; ; \quad (U_B \equiv 0)$$

или

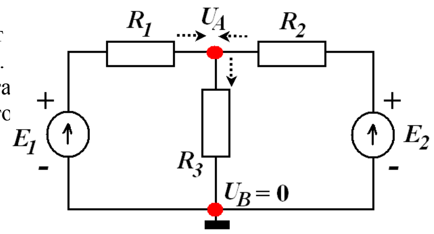
$$U_A \frac{R_2R_3 + R_1R_3 + R_2R_1}{\cancel{R_1R_2}R_3} = \frac{E_1R_2 + E_2R_1}{\cancel{R_1R_2}}$$

Тогава възловите напрежения са:

$$\Rightarrow \quad U_A = R_3 \frac{E_1R_2 + E_2R_1}{R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1} = R_3 \frac{E_1R_2 + E_2R_1}{\Delta^c} \; ; \quad U_B = 0$$

Пример 3 (прод.)

След като напреженията във всички възлови точки са известни, лесно могат да се определят токовете $I_{1,2,3}$ в отделните клонове на веригата. Това може да стане от законите на Ом за цялата верига, записани за всеки отделен контур, както и I закон на Кирхоф за връзката между токовете, влизащи и излизащи в даден възел.



$$E_1 = I_1R_1 + U_A$$

$$-E_2 = -I_2R_2 - U_A$$

$$0 = I_3R_3 - U_A$$

Тогава истинските токове $I_{1,2,3}$ в 3-те клона могат да се определят от възловите напрежения чрез представените вдясно изрази. Отново може да се провери, че новите изрази за токовете в клоновете съвпадат с вече получените в двата предишни примера.

$$I_1 = \frac{E_1 - U_A}{R_1} = \frac{E_1(R_3 + R_1) - E_2R_3}{\Delta^c}$$

$$I_2 = \frac{E_2 - U_A}{R_2} = \frac{-E_1R_3 + E_2(R_3 + R_1)}{\Delta^c}$$

$$I_3 = \frac{U_A}{R_3} = \frac{E_1R_2 + E_2R_1}{\Delta^c}$$

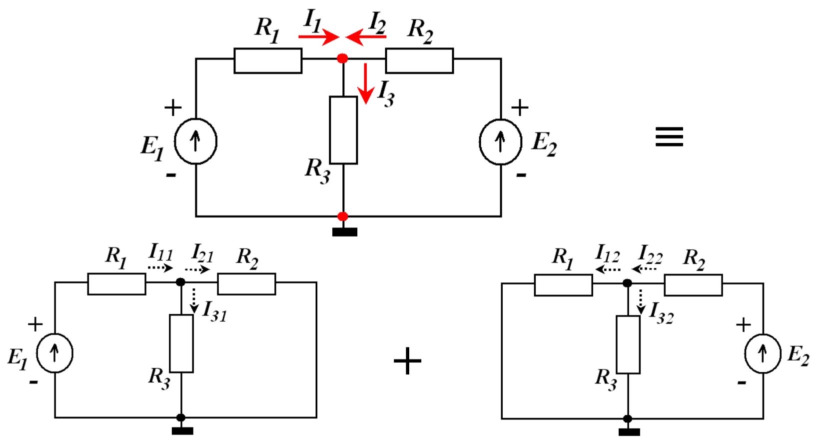
Пример 4: Метод на суперпозицията

Долу сме представили схематично приложение на метода на суперпозицията към вече разгледаната верига. Както бе показано, при този метод токът във всеки *j*-ти клон I_j от дадена верига е алгебрична сума от токовете I_{jk}, създадени в същия клон под действието на всеки отделен източник във схемата, като се изключат останалите. Вдясно са дадени изразите, а долу са начертани съответните схеми. Студентите мога за упражнение сами да определят изрази за токовете $I_{1,2,3}$.

$$I_1 = I_{11} - I_{12}$$

$$I_2 = I_{22} - I_{21}$$

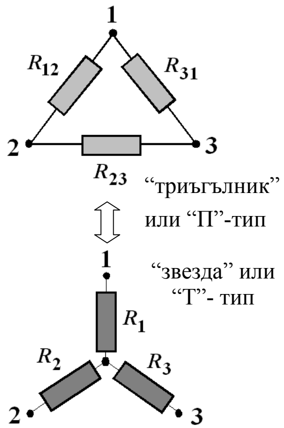
$$I_3 = I_{31} + I_{32}$$



Метод на еквивалентните схеми

Вече преставихме основният принцип на този метод, според който всяка част от дадена сложна електрическа верига може да се замени с електрически еквивалентна на нея проста верига. Това може да стане с проста схема с пасивни елементи (не винаги) или с проста схема с активни елементи (източници на ток и напрежение) (винаги).

Долу е показан най-известният пример за еквивалентни схеми само чрез пасивни елементи – това е преходът от свързване тип "триъгълник" в тип "звезда" и обратно (известен още като преход между схеми от "П"-тип в "Т"-тип и обратно).



$$R_{12} = R_1 + R_2 + \frac{R_1R_2}{R_3}$$

$$R_{23} = R_2 + R_3 + \frac{R_2R_3}{R_1}$$

$$R_{31} = R_3 + R_1 + \frac{R_3R_1}{R_2}$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$R_1 = \frac{R_{12}R_{31}}{R_\Sigma}$$

$$R_2 = \frac{R_{23}R_{12}}{R_\Sigma}$$

$$R_3 = \frac{R_{31}R_{23}}{R_\Sigma}$$

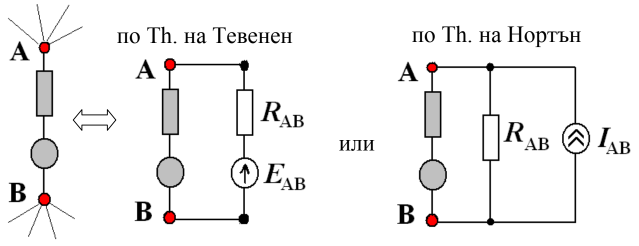
$$R_\Sigma = R_{12} + R_{23} + R_{31}$$

Метод на еквивалентните схеми с генератори на напрежение и ток

Това е един от най-често използваните методи за опростен анализ на вериги, когато се интересуваме само от част от по-сложна верига. Пример е показан долу. Нека да търсим решение за параметрите (ток, напрежение) в клона AB, а останалата част на веригата не ни интересува. Тогава можем да заменим тази част, която не ни интересува, с еквивалентен генератор на напрежение или ток, като използваме теоремата на Тевенен (или Нортън):

Th. Thévenin/Norton: Всяка част от дадена сложна електрическа верига по отношение на друга нейна част (дори само един неин клон), свързани в т. A и B, може да се замени с проста схема с генератор на напрежение E_{AB} (Thévenin) или генератор на ток I_{AB} (Norton) с вътрешно съпротивление R_{AB}. Кога кой генератор да се използва се определя от удобство в конкретната схема.

Тук R_{AB} е еквивалентното съпротивление на заместваната част от веригата, в която всички източници са дадени "накъсо". ЕДН на генератора на напрежение E_{AB} е напрежението на "празен ход" (open) между на т. A и B, когато интересуващият ни клон AB отсъства (веригата му е прекъсната). Токът I_{AB} е токът на "късо съединение" (short) между т. A и B, при условие, че клонът AB, който ни интересува, в даден "накъсо" в схемата между A и B.



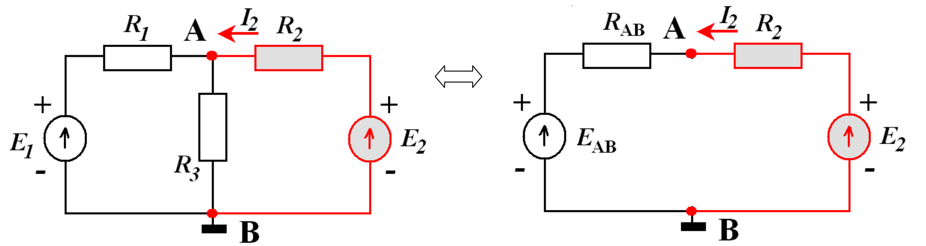
$$R_{AB} = \sum R$$

$$E_{AB} = U_A - U_B\big|_{\text{open}}$$

$$I_{AB} = I_{AB}\big|_{\text{short}} = \frac{E_{AB}}{R_{AB}}$$

Пример 5а: Метод на еквивалентния генератор на напрежение

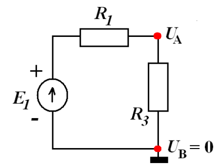
За илюстрация на прилагане на метода на еквивалентните схеми с генератори ще разгледаме отново вече решения по други методи пример. Сега задачата е да се определи токът $I_2 = ?$ в отбелязания клон AB чрез заместване с еквивалентен генератор на напрежение (Thévenin).



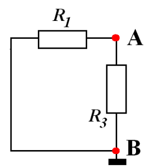
Решение:

$$E_2 - E_{AB} = I_2(R_2 + R_{AB}) \quad \Rightarrow \quad I_2 = \frac{E_2 - E_{AB}}{R_2 + R_{AB}}$$

Определяне на еквивалентните параметри:



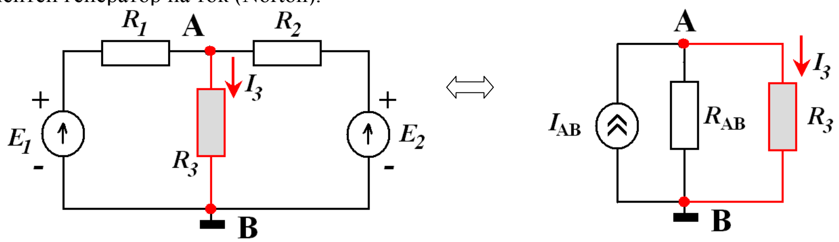
$$E_{AB} = \frac{E_1 R_3}{R_1 + R_3}$$



$$R_{AB} = \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3}$$

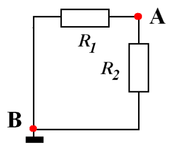
Пример 5б: Метод на еквивалентния генератор на ток

Следващата илюстрация е с прилагане на метода на еквивалентните схеми с генератор на ток. Задачата е да се определи токът $I_3 = ?$ в отбелязания клон AB чрез заместване с еквивалентен генератор на ток (Norton).



Решение: $I_3 = I_{AB}\dfrac{R_{AB}}{R_3 + R_{AB}}$

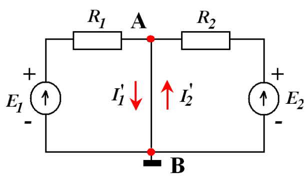
$$R_{AB} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$



Определяне на еквивалентните параметри:

$$I_{AB} = I_1^{'} - I_2^{'} = \frac{E_1}{R_1} + \frac{E_2}{R_2}$$

$$\Rightarrow \quad I_{AB} = \frac{E_1 R_2 + E_2 R_1}{R_1 R_2}$$

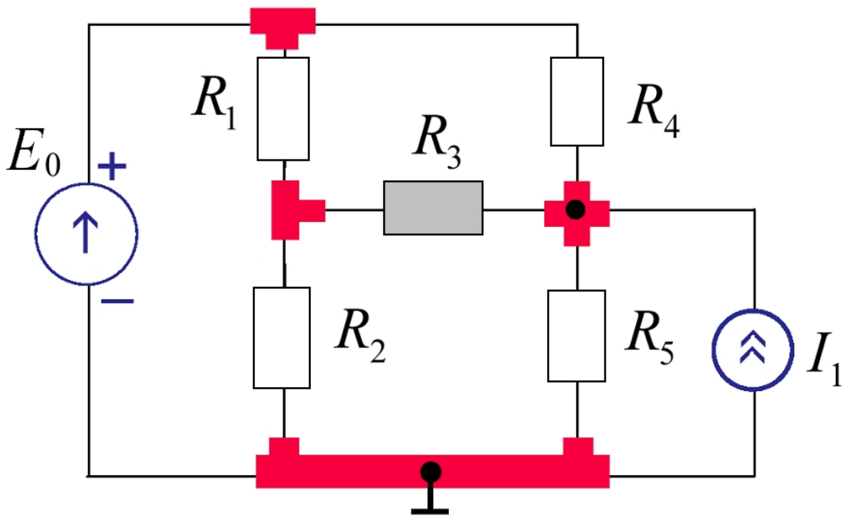


Краен отговор:

$$I_3 = \frac{E_1 R_2 + E_2 R_1}{\Delta^c}$$

Задача за студентите

Определете токът през съпротивлението R_3, прилагайки известните ви методи за анализ.

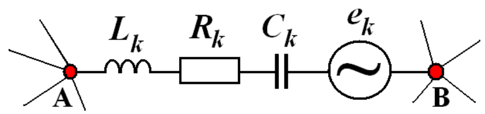


Лекция 4

4.3 Комплексен метод за анализ на променливо-токови електрически вериги. Комплексни импеданси и адмитанси.

Закони на Кирхоф в диференциална форма

Вече показахме, че законите на Кирхоф могат да се обобщят и за сложни променливотокови вериги в диференциална форма.



❖ I закон: $$\sum_k i_k = 0$$

❖ II закон: $$\sum_k e_k = \sum_k \left[L_k \frac{di_k}{dt} + R_k i_k + \frac{1}{C_k} \int i_k dt \right]$$

Вторият тип закони на Кирхоф сега са комплексни интегро-диференциални уравнения за променливите токове i_k. Със замяна $i_k \to i^*_k$ и ако R_k, C_k и L_k не зависят от времето, законите на Кирхоф се се получават лесно решими диференциални уравнения от 2 ред за токовете.

$$i_k^* \Rightarrow \int i_k dt \qquad \sum_k e_k = \sum_k \left[L_k \frac{d^2 i_k^*}{dt^2} + R_k \frac{di_k^*}{dt} + \frac{1}{C_k} i_k^* \right]$$

Математически проблеми

Това, че уравненията на Кирхоф са интегро-диференциални или диференциални уравнения за променливите токове i_k е сериозен математически проблем. Как може да се реши?

Нека броят на неизвестните променливи токове в отделни клонове на веригата е n. Както и в случая на постояннотокови вериги, от уравненията от I тип се отделят (q-1) линейно-независими уравнения (q- брой на възлите) и се добавят още (p - q +1) от уравненията от II тип. Така се получава система от n независими линейни диференциални уравнения от 2 ред за тока и неговите първа и втора производни. Известно е, че математически системата може се представи с едно обикновено диференциално уравнение от $2n$-ти ред

$$A_{2n} \frac{d^{2n} i_k}{dt^{2n}} + A_{2n-1} \frac{d^{2n-1} i_k}{dt^{2n-1}} + \ldots + A_2 \frac{d^2 i_k}{dt^2} + A_1 \frac{di_k}{dt} + A_0 i_k = f_k(t)$$

Тук i_k е един неизвестен ток, чрез който могат да се изразят останалите; A_k ($k = 1 \div 2n$) са постоянни коефициенти пред различните производни на тока i_k, а $f(t)$ е свободния член – функция на времето на ЕДН на източниците.

Решения:

1) при $f(t) = 0$ (хомогенно уравнение). Това е случая на свободни токове и преходни процеси във веригата (свободни трептения). Решението за i_k е т. нар. общо решение i_0 на диференциалното уравнение.

$$f(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad i_k = i_0$$

2) при $f(t) \neq 0$ (нехомогенно уравнение). Това е случая на принудени (установени) трептения. Решението за i_k е сума от общото решение i_0 и едно частно решение i_p.

$$f(t) \neq 0 \quad \Rightarrow \quad i_k = i_0 + i_p$$

Основна идея на комплексния метод

Като се имат в предвид казаното дотук, за да се анализира една сложна променливотокова верига в установен или преходен режим трябва да се намерят общото и поне едно частно решение на системата диференциални уравнения. Тези решения са синусоидални или косинусоидални функции и комбинация от тях. Така напр. чрез Фурие преобразуванията могат да се намерят решенията за дадена схема. Това, обаче е сложно и трудоемко.

Идея на комплексния (символичния) метод:

За да се избегнат математическите затруднения, вместо с реалните токове и напрежения се въвеждат "символични" токове и напрежения, представени с комплексни числа. След математически преобразувания върху комплексните функции, продиктувани от условията на задачата, се получава комплексен резултат, от който обратно се "извличат" реалните токове и напрежения - вече като решения на анализа.

$$i(t) \Rightarrow \dot{I}(t) \qquad \dot{I}(t) = I_m[\cos(\omega t + \varphi_i) + j\sin(\omega t + \varphi_i)] = I_m e^{j(\omega t + \varphi_i)}$$

$$u(t) \Rightarrow \dot{U}(t) \qquad \dot{U}(t) = U_m[\cos(\omega t + \varphi_u) + j\sin(\omega t + \varphi_u)] = U_m e^{j(\omega t + \varphi_u)}$$

Важна е връзката, която ще установим между реалния ток/напрежение (в реалната схема) и комплексния ток/напрежение. Долу са представени три варианта за косинусоидален или синусоидален ток:

$$i(t) = \frac{1}{2}\left[I_m e^{j(\omega t + \varphi_i)} \pm I_m^* e^{-j(\omega t + \varphi_i)} \right]$$

$$i(t) = \mathrm{Re}\,\dot{I}(t) \quad \rightarrow \quad i(t) \sim \cos(\omega t) \quad \text{или} \quad i(t) = \mathrm{Im}\,\dot{I}(t) \quad \rightarrow \quad i(t) \sim \sin(\omega t)$$

Закони на Кирхоф в комплексна форма

Нека комплексните токове в променливо-токовата схема се описват във вида: $\dot{I}_k = I_{m,k} e^{j\omega t}$

Тогава:

❖ I закон: $$\sum_k \dot{I}_k = 0$$

❖ II закон: $$\sum_k \dot{E}_k = \sum_k \left[L_k j\omega \dot{I}_k + R_k \dot{I}_k + \frac{1}{j\omega C_k} \dot{I}_k \right]$$

$$\sum_k \dot{E}_k = \sum_k \dot{I}_k \left[R_k + j\omega L_k + \frac{1}{j\omega C_k} \right] = \sum_k \dot{I}_k \left[R_k + j\left(\omega L_k - \frac{1}{\omega C_k} \right) \right]$$

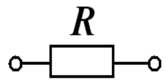
Окончателният вид на законите на Кирхоф в комплексна форма са представени по-долу. Така те много приличат на формата на уравненията, които имат за постояннотокови вериги. Следователно, и сега могат да се прилагат всички разгледани досега методи за анализ на вериги. Разликата сега е в новата форма на комплексното съпротивление – импеданс Z на елементите в отделните клонове (вж. следващата страница).

❖ I закон: $$\sum_k \dot{I}_k = 0$$

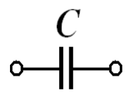
❖ II закон: $$\sum_k \dot{E}_k = \sum_k \dot{I}_k Z_k$$

Комплексен импеданс

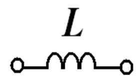
При комплексния метод се въвежда специално понятие - комплексно съпротивление (импеданс) на отделните елементи, включени във веригата и на целия клон от веригата в общия случай Z. Реципрочната му стойност $Y = 1/Z$ е известна като комплексна проводимост или адмитанс.



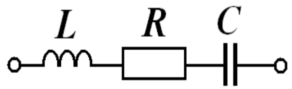
$$Z_R = R$$



$$Z_C = \frac{1}{j\omega C} = -j\frac{1}{\omega C}$$



$$Z_L = j\omega L$$



$$Z = R + jX = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)$$

$$Y = \frac{1}{Z} = G + jB$$

Има един съществен въпрос: след като комплексното съпротивление при комплексния метод е Z, кое е реалното съпротивление, което го представлява във веригата? (т.е. ако $i \to \mathrm{Re}I$, дали $R \to \mathrm{Re}Z$, или нещо друго. Отговорът е модулът на импеданса |Z| – вж. формулата вдясно.

$$\boxed{\left| \dot{Z} \right| = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}}$$

Енергетични характеристики в променливотокови вериги

Важен е и друг въпрос при прилагане на комплексния метод – как се изразява мощността на променливотоковия сигнал? Мощността в консуматорите $P(t)$ е реална величина:

$$P(t) = u(t) i(t)$$

Тогава въпросът е как да се свърже с комплексните токове, напрежения и съпротивления? Долу е показано това за усреднената за един период мощност:

$$\overline{P(t)} = \frac{1}{4}\left[\dot{I}\dot{U}^* e^{(j\omega t - j\omega t + j\varphi)} + \dot{I}^* \dot{U} e^{(-j\omega t + j\omega t - j\varphi)} + \dot{I}\dot{U} e^{(2j\omega t + j\varphi)} + \dot{I}^* \dot{U}^* e^{(-2j\omega t - j\varphi)} \right]$$

Понеже $\overline{e^{\pm(2j\omega t)}} \equiv 0$ $\Rightarrow$ $\overline{P(t)} = \frac{1}{4}\left[\dot{I}\dot{U}^* e^{j\varphi} + \dot{I}^* \dot{U} e^{-j\varphi} \right] = \frac{1}{2} \left| \dot{U} \right| \left| \dot{I} \right| \cos\varphi$

Окончателно получаваме следният израз за средната мощност чрез модулите на комплексните токове и напрежения и чрез ефективните токове и напрежения и фазовата разлика φ:

$$\boxed{\overline{P(t)} = \frac{1}{2} \left| \dot{U} \right| \left| \dot{I} \right| \cos\varphi = I_{eff} U_{eff} \cos\varphi}$$

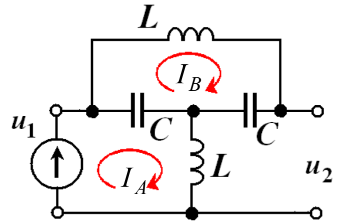
$$U_{eff} = \frac{\left| \dot{U} \right|}{\sqrt{2}} \qquad I_{eff} = \frac{\left| \dot{I} \right|}{\sqrt{2}}$$

Други изрази (чрез импеданса):

$$\overline{P(t)} = \frac{1}{2} \left| \dot{I} \right|^2 \left| Z \right| \cos\varphi = \frac{1}{2} \frac{\left| \dot{U} \right|^2}{\left| Z \right|} \cos\varphi$$

Решен пример

Да се определи величината $k_u = u_2 / u_1$ на дадената верига и да се построи честотната ѝ зависимост.



Решение: По комплексния метод, комбиниран с метода на кръговите токове. Въвеждаме комплексни кръгови токове и комплексни напрежения

$$i_{A,B}(t) = \mathrm{Re}\, I_{A,B}(t) \qquad u_{1,2}(t) = \mathrm{Re}\, U_{1,2}(t)$$

Търсеното изходно напрежение U_2 и K_U са

$$U_2 = U_1 - I_B j\omega L; \quad I_B = ?;$$

$$k_u = \mathrm{Re}\, K_U = \mathrm{Re}(U_2 / U_1)$$

Търсим тока I_B по метода на кръговите токове:

$$\begin{cases} U_1 = I_A\left(j\omega L + \frac{1}{j\omega C} \right) - I_B \frac{1}{j\omega C} \\ 0 = I_B\left(j\omega L + \frac{2}{j\omega C} \right) - I_A \frac{1}{j\omega C} \end{cases} \Rightarrow \left\langle \begin{array}{cc|c} j\omega L + \frac{1}{j\omega C} & -\frac{1}{j\omega C} & U_1 \\ -\frac{1}{j\omega C} & j\omega L + \frac{2}{j\omega C} & 0 \end{array} \right\rangle$$

Решен пример (прод.)

Търсеният ток е

$$I_B=\frac{\begin{vmatrix} j\omega L+\dfrac{1}{j\omega C} & U_1 \\ -\dfrac{1}{j\omega C} & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} j\omega L+\dfrac{1}{j\omega C} & -\dfrac{1}{j\omega C} \\ -\dfrac{1}{j\omega C} & j\omega L+\dfrac{2}{j\omega C} \end{vmatrix}}=\frac{\dfrac{U_1}{j\omega C}}{\left(j\omega L+\dfrac{1}{j\omega C}\right)\left(j\omega L+\dfrac{2}{j\omega C}\right)-\dfrac{1}{\omega^2 C^2}}=$$

$$=\frac{U_1}{j\omega C}\cdot\frac{1}{\dfrac{3L}{C}-\omega^2L^2-\dfrac{1}{\omega^2C^2}}$$

$$\Rightarrow$$

$$U_2=U_1\left(1-\frac{L/C}{\dfrac{3L}{C}-\omega^2L^2-\dfrac{1}{\omega^2C^2}}\right)=U_1\left(1-\frac{1}{3-\omega^2LC-\dfrac{1}{\omega^2LC}}\right)$$

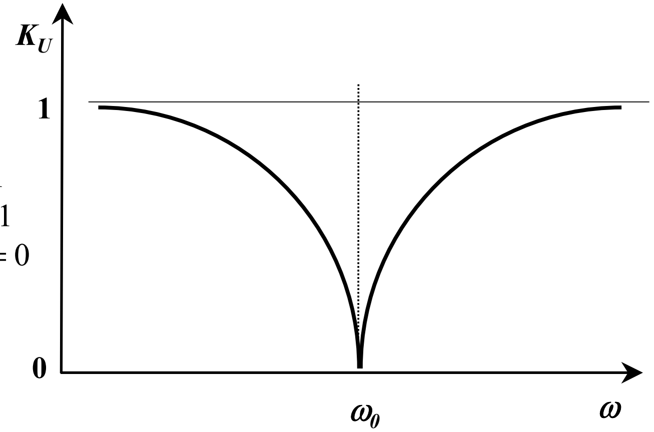
Решен пример (прод.)

Въвеждаме означение:

$$\omega_0=\frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \Rightarrow \quad k_u=\operatorname{Re}K_U=1-\frac{1}{3-\dfrac{\omega^2}{\omega_0^2}-\dfrac{\omega_0^2}{\omega^2}}=1-\frac{\omega^2\omega_0^2}{3\omega^2\omega_0^2-\omega^4-\omega_0^4}$$

Можем да начертаем качествено зависимостта $K_U(\omega)=U_2/U_1$, като я изследваме за някои типични стойности на ω, установени с гранични преходи за $\omega = 0, \infty, \omega_0$.

$$\omega=0;\rightarrow K_U=1$$
$$\omega=\infty;\rightarrow K_U=1$$
$$\omega=\omega_0;\rightarrow K_U=0$$



Лекция 4

4.4 Операторен метод (метод на Лаплас) за анализ на променливо-токови електрически вериги в преходен режим.

Операторен метод

Комплексният (символичният) метод може да се използва само в променливотокови електронни вериги в установен режим (принудени трептения). В преходни режими този метод е неприложим. В тези случаи може да се използва по-общ метод – т. нар. операторен метод (или метод на Лаплас).

Основа на операторния метод:

На всяка функция на времето $f(t)$ (*функция-оригинал*) (това е ток, напрежение или др. величина) се съпоставя комплексна функция $F(p)$ (*функция-образ*, дефинирана в комплексната равнина $p = \alpha + j\omega$) съгласно т. нар. преобразуване на Лаплас

$$p=\alpha+j\omega$$

$$F(p)=\int_0^\infty f(t)\,e^{-pt}dt \qquad \text{право преобразуване} \qquad F(p)\leftrightarrow f(t)$$

$$f(t)=\frac{1}{2\pi j}\int_{p^*=\alpha-j\omega}^{p=\alpha+j\omega}F(p)\,e^{pt}dp \qquad \text{обратно преобразуване} \qquad f(t)\leftrightarrow F(p)$$

Важна е връзката, която ще установим между реалния ток/напрежение (в реалната схема) и комплексния ток/напрежение. Долу са представени три варианта за косинусоидален или синусоидален ток:

Основни математически операции при операторния метод

$$\sum f(t) \leftrightarrow \sum F(p)$$

$$\frac{d^{(n)} f(t)}{dt^n} \leftrightarrow p^n F(p)$$

$$af(t) \leftrightarrow aF(p)$$

$$f(at) \leftrightarrow \frac{1}{a} F\left(\frac{p}{a}\right)$$

$$(-1)^n t^n f(t) \leftrightarrow \frac{d^n F(p)}{dp^n}$$

$$f(t-\tau) \leftrightarrow F(p) e^{-p\tau}$$

$$\int f(t)dt \leftrightarrow \frac{1}{p} F(p)$$

$$\frac{df(t)}{dt} \leftrightarrow pF(p)$$

$$\int f_1(t) f_2(\tau - t) dt \leftrightarrow F_1(p) F_2(p)$$

Идея на операторния метод при анализ на вериги

Подобно на комплексния метод, и при операторния метод за анализ на сложни променливотокови вериги на реалните токове и напрежения (функции-оригинали) се въвеждат “операторни” токове и напрежения (функции-образи) на основата на правото преобразуване на Лаплас. След математически преобразувания върху операторните функции, свързани с конкретната задачата, се получават операторни решения, от които обратно се “извличат” реалните токове и напрежения на основата на обратното преобразуване на Лаплас. Така величината $p = \alpha + j\omega$ има смисъл на комплексна честота (ω – кръгова честота, α – затихване/усилване във времето).

$$i(t) \leftrightarrow I(p)$$
$$u(t) \leftrightarrow U(p)$$

При тези условия уравненията на Кирхоф от II тип могат да се преобразува по следния начин

$$\sum_k E_k(p) = \sum_k \left[pL_k I_k(p) + R_k I_k(p) + \frac{1}{pC_k} I_k(p) \right]$$

Уравнения на Кирхоф в операторен вид:

- I закон: $\sum_k \dot{I}_k(p) = 0$
- II закон:

$$\sum_k E_k(p) = \sum_k I_k(p) Z_k(p)$$

Сега се въвежда операторно съпротивление $Z(p)$ (импеданс) и операторна проводимост $Y(p)$ (адмитанс)

$$Z(p) = R + pL + \frac{1}{pC}$$

$$Y(p) = \frac{1}{Z(p)}$$

Таблица на най-често срещаните в електрониката преходи на функции-оригинали и функции-образи

$$\delta(t) \leftrightarrow 1$$

$$A = const \leftrightarrow \frac{A}{p}$$

$$t \leftrightarrow \frac{1}{p^2}$$

$$t^n \leftrightarrow \frac{n!}{p^{n+1}}$$

$$\sin \omega t \leftrightarrow \frac{\omega}{p^2 + \alpha^2}$$

$$\cos \omega t \leftrightarrow \frac{p}{p^2 + \alpha^2}$$

$$e^{\pm \alpha t} \leftrightarrow \frac{1}{p \mp \alpha}$$

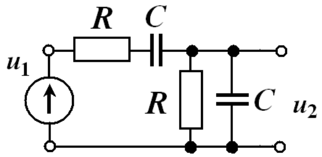
$$1 - e^{\pm \alpha t} \leftrightarrow \frac{\alpha}{p(p \mp \alpha)}$$

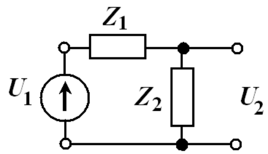
$$te^{-\alpha t} \leftrightarrow \frac{1}{(p-\alpha)^2}$$

$$e^{\pm \beta t} - e^{\pm \alpha t} \leftrightarrow \frac{\alpha - \beta}{(p \mp \beta)(p \mp \alpha)}$$

Решен пример за преходен процес

Да се определи величината $K_U = u_2/u_1$ на дадената верига, когато u_1 търпи скок $u_1 = U_0$ при $t = 0$, да се начертае зависимостта $u_2(t)$ и да се определи в кой момент има екстремум.





Решение: Задачата трябва да се реши чрез операторния с метод, понеже се касае за преходен (непериодичен) процес (скок на входното напрежение от 0 до U_0 при $t = 0$). Въвеждаме операторните напрежения U_2 и U_1 и операторните импеданси Z_2 и Z_1. Тогава:

$$K_U(t) = \frac{U_2(p)}{U_1(p)} = \frac{Z_2(p)}{Z_1(p) + Z_2(p)} = \frac{1}{1 + \frac{Z_1}{Z_2}}$$

където

$$Z_1(p) = R + \frac{1}{pC} \qquad \frac{1}{Z_2(p)} = pC + \frac{1}{R}$$

Преобразуваме израза:

$$K_U(p) = \frac{1}{1 + \left(R + \frac{1}{pC}\right)\left(pC + \frac{1}{R}\right)} = \frac{1}{1 + \frac{1 + 2pRC + p^2R^2C^2}{pRC}} = \frac{1}{3 + pRC + \frac{1}{pRC}}$$

Решен пример (прод.)

Полагаме $\omega_0=\dfrac{1}{RC}$

$$\Rightarrow\quad U_2(p)=U_1(p)\frac{pRC}{3pRC+1+p^2R^2C^2}=$$

$$=U_1(p)\frac{p/\omega_0}{3p/\omega_0+1+p^2/\omega_0^2}=U_1(p)\frac{p\omega_0}{3p\omega_0+\omega_0^2+p^2}$$

От прехода

$$u_1(t)=U_0\ \Rightarrow\ U_1(p)=\frac{U_0}{p}\quad\Rightarrow\quad U_2(p)=\frac{\omega_0}{3p/\omega_0+1+p^2/\omega_0^2}$$

За да се реши успешно задачата, трябва в знаменателя на зависимостта да се получат изрази от типа $1/(p\pm\alpha)$ или подобни. В подобен случай трябва да се определят корените p_1 и p_2 на квадратното уравнение в знаменятеля и да се използва формулата на Виет. Тогава

$$U_2(p)=\frac{\omega_0}{(p-p_1)(p-p_2)}U_0\qquad \text{където}\qquad p_{1,2}=\frac{-3\pm\sqrt5}{2}\omega_0$$

$$\Rightarrow\quad U_2(p)=U_0\omega_0\left[\frac{A}{(p-p_1)}+\frac{B}{(p-p_2)}\right]=U_0\omega_0\frac{1}{p_1-p_2}\left[\frac{1}{(p-p_1)}-\frac{1}{(p-p_2)}\right]$$

Решен пример (прод.)

Понеже в табличните преходи при преобразуванието на Лаплас

$$\frac{1}{p-p_{1,2}}\leftrightarrow e^{p_{1,2}t}\quad\Rightarrow\quad u_2(t)=U_0\cancel{\omega_0}\frac{1}{\cancel{\omega_0}\sqrt5}\left[e^{p_1t}-e^{p_2t}\right]$$

$$p_1=-0.382\omega_0;\quad p_2=-2.618\omega_0$$

Можем да начертаем качествено зависимостта $U_2(t)$, като я изследваме за екстремум. За целта ще определим производната на $U_2(t)$ по t и ще я нулираме (забележка: от отрицателния знак на 2-рата производна се получава, че това е максимум)

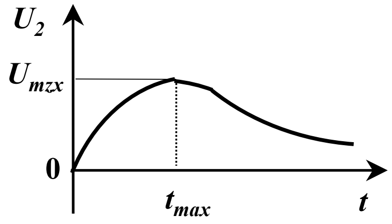
$$\left.\frac{du_2(t)}{dt}\equiv 0\right|_{t=t_{\max}}\ \Rightarrow\ p_1e^{p_1t}=p_2e^{p_2t}\ \Rightarrow\ \ln p_1+p_1t=\ln p_2+p_2t$$

Тогава:

$$t_{\max}=\frac{\ln(p_2/p_1)}{p_1-p_2}$$

$$t_{\max}=\frac{\ln(2.618/0.382)}{2.618-0.382}/\omega_0=0.861/\omega_0$$

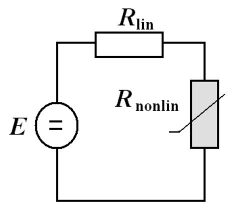
$$t_{\max}=0.861\,RC$$



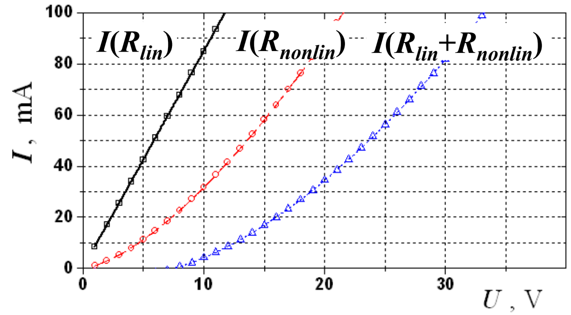
Лекция 4

4.5 Анализ на вериги с нелинейни елементи – основни принципи.

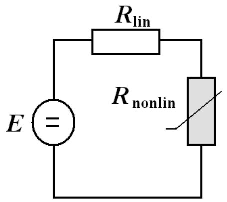
Нелинейни електрически вериги



Досега разгледахме анализът на вериги, в които има само *линейни елементи* R_{lin}. Това означава, че връзката между тока и напрежението $I(U)$ е линейна (права линия) и законът на Ом (т. е. законът на Кирхоф) е валиден. Анализът на подобни вериги може да се извърши по методите, разгледани досега, без никакви ограничения. Има, обаче, и вериги, в които се включват *нелинейни елементи* R_{nonlin}. Сега връзката ток-напрежение $I(U)$ е нелинейна, т.е. законът на Ом (или на Кирхоф) вече не е валиден (вж. примерите на фигурата). При наличие както на линейни, така и на нелинейни елементи, връзката $I(U)$ остава нелинейна. Как могат да се анализират подобни вериги?

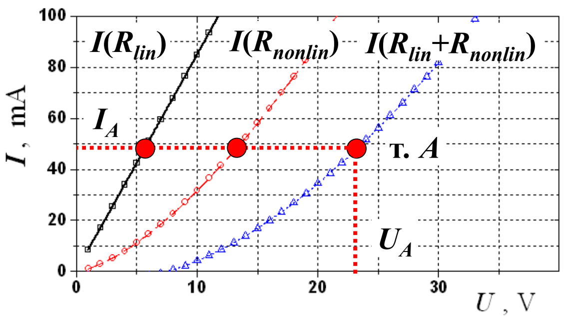


Статично съпротивление



Един от начините за анализ на схемите е чрез дефиниране на съпротивление в дадена точка от волт-амперната характеристика. Това е т. нар. *статично съпротивление* R_{stst} или статичната проводимост G_{stst} (вж. графиката в т. А). Този подход дава информация за връзката между тока и напрежението във всяка точка, но не може да оцени нелинейността.

$$R_{stat} = \frac{U_A}{I_A} \qquad G_{stat} = \frac{1}{R_{stat}}$$



Динамично (диференциално) съпротивление

Много по-информативен начин за определяне на връзката между тока и напрежението във всяка точка от волт-амперната характеристика на нелинеен елемент е въвеждане на т. нар. *динамично* (*диференциално*) *съпротивление* R_d или динамична проводимост G_d (вж. т. А на графиката). То дава информация за наклона на V-A характеристика в дадена точка от нея и следователно, за характера на нелинейността на елемента.

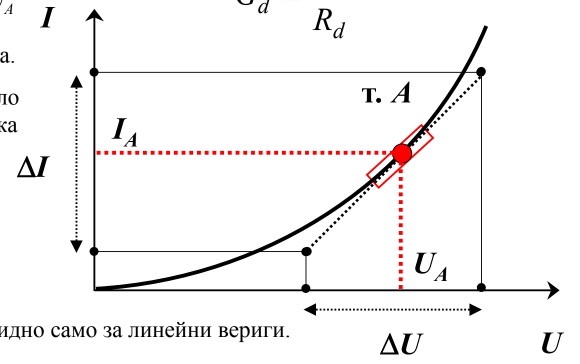
Как се определя R_d графично? В точката, където ще го определяме, построяваме допирателна към кривата на V-A характеристика. По нея намираме интервалите ΔU_A и ΔI_A и по тяхното отношение определяме R_d или G_d в тази точка.

$$R_d(U_A, I_A) = \lim_{\Delta I \to 0} \frac{\Delta U_A}{\Delta I_A} = \left.\frac{dU}{dI}\right|_{U_A, I_A}$$

$$G_d = \frac{1}{R_d}$$

Така в малък линеен участък около всяка точка от V-A характеристика на даден нелинеен елемент може да се запише линейният закон на Кирхоф, който е валиден само за този участък:

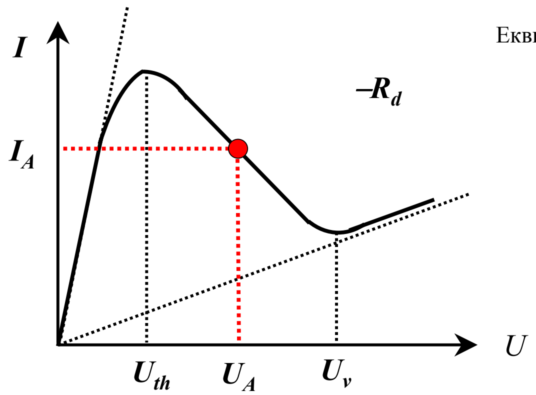
$$U = U_A + R_d I_A$$



Условието $R_{stat} \equiv R_d$ е валидно само за линейни вериги.

Отрицателно диференциално съпротивление

Фактът, че динамичното (диференциалното) съпротивление в важен параметър в електрониката и при анализа на вериги се потвърждава и от примера по-долу. Дадена е типичната V-A характеристика на т. нар. Гън диод. В нея има два близки до линейност участъка, свързани в протичането през обема на диода на ток на “леки” носители (с малко статично съпротивление) при $U < U_{th}$ и на “тежки” (с голямо статично съпротивление) при $U > U_v$. Между тези два линейни участъка има участък с обратен наклон, в който диференциалното съпротивление има отрицателен знак $R_d < 0$. Отрицателното диференциално съпротивление играе важна при работата на осцилаторите в т. нар. “авто-генераторен” режим.



Еквивалентна схема на авто-генератор