Лекция 6

RC, RL и RLC вериги

Съдържание на Лекция 6

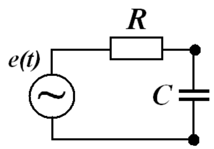
Лекция 6

6.1 RC схеми. Последователна RC схема в установен и неустановен режим. Преходни процеси

RC и RL вериги

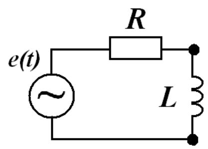
Веригите с включени R/C и R/L елементи (RC и RL вериги) са две много често явяващи се в по-сложните електронни схеми комбинации (още и комбинацията RLC). Причината за това е, че със свойствата си те намира много приложения в електрониката: формиране на сигнали, диференциращи и интегриращи вериги, трептящи резонансни кръгове, електрически филтри, честотно-зависимо обратни връзки в усилвателите, генераторите и др. активни устройства, настройващи и измерителни вериги и пр. RC-веригите се използват по-често от RL-веригите, понеже C-елементите са по-технологични, с по-малки размери, поддават се по-лесно на SMT монтаж.

❖ Последователна RC верига



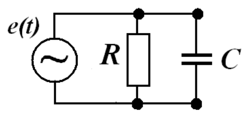
$$Z = R + \frac{1}{j\omega C}$$

❖ Последователна RL верига



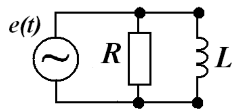
$$Z = R + j\omega L$$

❖ Паралелна RC верига



$$Y = \frac{1}{R} + j\omega C$$

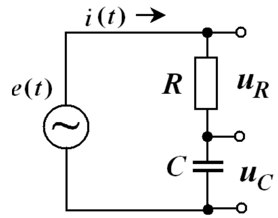
❖ Паралелна RL верига



$$Y = \frac{1}{R} + \frac{1}{j\omega L}$$

Последователна RC верига в установен режим

Подробно ще разгледаме само последователната RC верига (паралелната RC верига има подобни свойства и може да бъде разгледана самостоятелно от студентите). В общия случай можем да запишем следният израз за връзката на ЕДН с падовете върху R и C



$$e(t) = R\, i(t) + \frac{1}{C}\int i(t)\, dt = u_R(t) + u_C(t)$$

❖ Случай 1: Установен режим

Най-напред ще разгледаме случаят на принудени трептения в последователната RC верига под действие на външен променливотоков източник $e(t)$.

Въвеждаме комплексни токове и напрежения във веригата:

$$\dot{E} = \dot{I}\, Z; \quad Z = R + \frac{1}{j\omega C} \quad \Rightarrow \quad \dot{I} = \frac{\dot{E}}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \dot{E}\frac{j\omega C}{1 + \frac{1}{j\omega RC}} = I_0(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$$

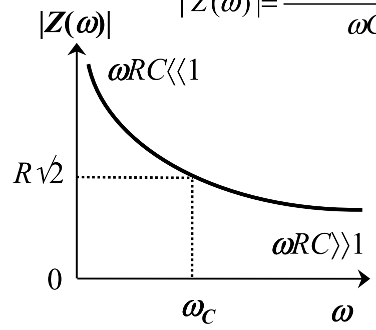
означение $\tau_{RC} = RC$

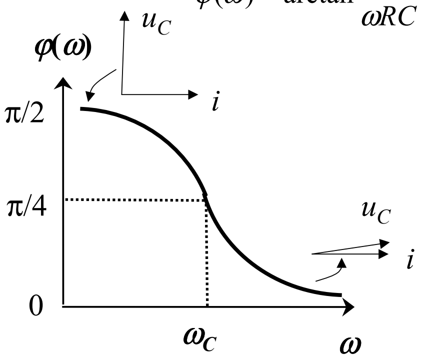
$$I_0(\omega) = \frac{|E|\,\omega C}{\sqrt{1+\omega^2 R^2 C^2}} = \frac{|E|\,\omega C}{\sqrt{1+\omega^2 \tau_{RC}^2}} \qquad \varphi(\omega) = \arctan\frac{1}{\omega RC} = \arctan\frac{1}{\omega \tau_{RC}}$$

Честотни зависимости на импеданса на RC веригата

Информация за честотните свойства на последователната RC верига може да се получи от честотните характеристики на модула и фазата на импеданса (вж. двете графики по-долу). Коментар: при ниски честоти ($\omega RC \ll 1$) $|Z|$ расте, напрежението U_C "изпреварва" по фаза тока с ~$\pi/2$ (т.е. съпротивлението R практически не оказва влияние); обратно, при високи честоти ($\omega RC \gg 1$) $|Z|$ намалява, фазата между тока и напрежението е ~0 (т.е. сега капацитетът C не оказва практическо влияние във веригата). Веригата има критична честота $\omega_C = 1/RC$, при която $|Z| = R\sqrt{2} = 1.41R$, а напрежението "изпреварва" по фаза тока с ~$\pi/4$.

$$|Z(\omega)| = \frac{\sqrt{1+\omega^2 R^2 C^2}}{\omega C} \qquad \varphi(\omega) = \arctan\frac{1}{\omega RC}$$



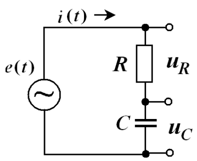


$$\omega_C = 1/\tau_{RC} = 1/RC$$

Преходни процеси в последователна RC верига

Работата на последователната RC верига в установен режим е важна при филтрите, схеми за обратни връзки и пр., но такава верига може да работи и в неустановен (преходен) режим (при зареждане/разреждане на кондензатор, формиращи вериги, изправители, параметрични усилватели и пр.).

❖ Случай 2: Неустановен (преходен) режим



Ще разгледаме следния типичен пример – подаване на скок на напрежението на входа на RC веригата, като ще следим преходните процеси на падовете U_C и U_R върху кондензатора и резистора. За тази цел ще използваме операторен метод. Въвеждаме операторни напрежения, токове и импеданси.

$$e(t) = \begin{cases} U_0; & t \ge 0 \\ 0; & t \ge 0 \end{cases} \qquad E(p) = \begin{cases} \frac{U_0}{p}; & t \ge 0 \\ 0; & t \ge 0 \end{cases}$$

$$\frac{U_0}{p} = RI(p) + \frac{1}{pC}I(p) = I(p)Z(p) \quad \text{където} \quad Z(p) = R + \frac{1}{pC}$$

$$\Rightarrow \quad I(p) = \frac{U_0}{p}\frac{1}{R+\frac{1}{pC}} = \frac{U_0}{R}\frac{1}{p+\frac{1}{RC}} = \frac{U_0}{R}\frac{1}{p+\alpha}$$

С означение

$$\alpha = \frac{1}{RC} = \frac{1}{\tau_{RC}}$$

Пример за преходен процес: зареждане на кондензатор

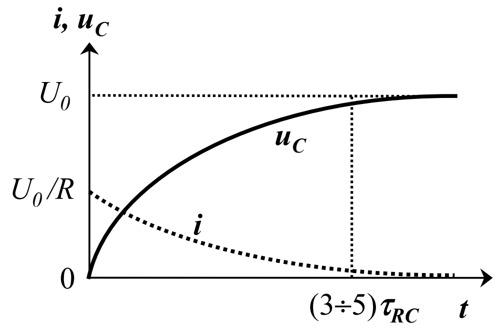
Операторният ток и функция на комплексната променлива p, която се среща в таблиците за типичните Лапласови преобразувания и, следователно, лесно можем да запишем следният израз на реалният ток във веригата $i(t)$:

$$i(t) = \frac{U_0}{R}e^{-\frac{t}{\tau_{RC}}} \quad \text{с означение} \quad \tau_{RC} = RC$$

Тук τ_{RC} е т. нар. "времеконстанта" на RC веригата; за този период дадена величина се изменя e-пъти (2.71 пъти)

От изразите за операторните напрежения получаваме

$$U_C(t) = Z_C(p)I(p); \quad U_R(t) = Z_R(p)I(p) \quad \Rightarrow \quad u_c(t) = U_0\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_{RC}}}\right), \quad u_R(t) = U_0 e^{-\frac{t}{\tau_{RC}}}$$

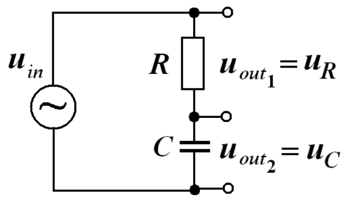


Коментар: Разгледаният пример се отнася за процеса на зареждане на кондензатор през последователно съпротивление. Зареждането става по експоненциален закон: колкото по висока е стойността на напрежението U_C, толкова по-ниска е стойността на зарядния ток i. Практическото зареждане настъпва след време $t \sim (3\div5)\,\tau_{RC}$.

Лекция 6

6.2 RC вериги като четири-полюсници. RC филтри. Диференциращи и интегриращи RC вериги. Примери

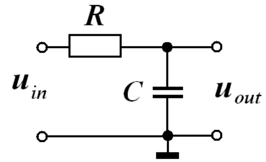
RC веригата като четириполюсник



Веригите с RC и RL елементи често се описват като четириполюсници – звена на филтри, диференциращи и интегриращи вериги и пр. Пример е даден за последователната RC верига. На входа й се подава периодичен сигнал u_{in}. Схемата има два възможни изхода: от падовете на напрежение u_C и u_R върху резистора и кондензатора (долу са дадени изрази за комплексния коефициент на предаване по напрежение в двата случая)

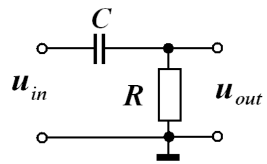
❖ Случай 3: Четириполюсници като филтри

❖ RC верига като нискочестотен филтър



$$K_U = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{1}{1 + j\omega\tau_{RC}}$$

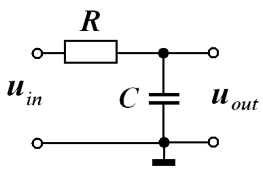
❖ RC верига като високочестотен филтър



$$K_U = \frac{R}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{j\omega\tau_{RC}}}$$

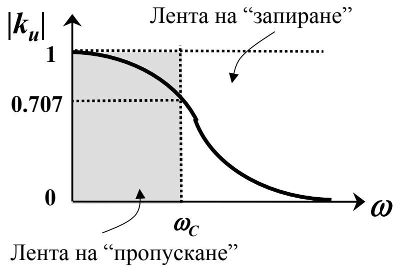
Нискочестотен филтър с RC елементи

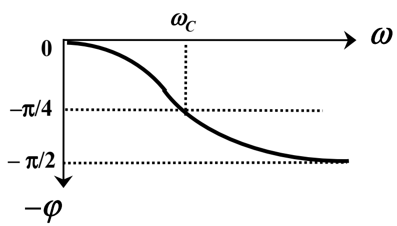
НЧФ



При преминаване на променливотокови сигнали с богат спектър през различни филтри, техният спектър се изменя. Нискочестотният филтър (НЧФ) "пропуска" без загуби (филтрира) нискочестотните съставки на сигнала при $\omega \ll \omega_C$ и не променя фазата им ($\varphi \to 0$). Обратно, при високи честоти $\omega \gg \omega_C$ сигналите практически не се пропускат, а фазата им се изменя на $-\pi/2$. Така се формират две ленти: лента на пропускане (pass band) $\omega < \omega_C$ и лентата на "запиране" (stop band) $\omega > \omega_C$, които се разделят при $\omega = \omega_C$ ($\omega_C = 1/RC$ – критична честота на филтъра, cut-off).

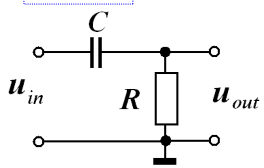
$$|K_U| = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2\tau_{RC}^2}} \qquad \varphi = -\arctan \omega\tau_{RC}$$





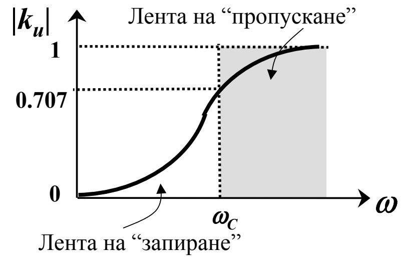
Високочестотен филтър с RC елементи

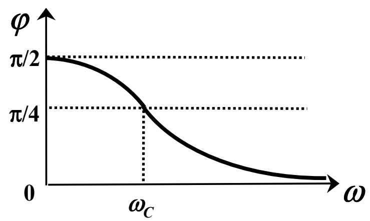
ВЧФ



Високочестотният филтър (ВЧФ) има обратно действие на НЧФ. ВЧФ "пропуска" без загуби (филтрира) високочестотните съставки на сигнала при $\omega \gg \omega_C$ и не променя фазата им ($\varphi \to 0$). Обратно, ВЧФ практически не пропуска сигналите при ниски честоти $\omega \ll \omega_C$, а фазата им се изменя на $+\pi/2$. Така отново се формират две ленти, но те са противоположни на тези в НЧФ: лента на пропускане (pass band) $\omega > \omega_C$ и лентата на "запиране" (stop band) $\omega < \omega_C$, които отново се разделят при критичната честота $\omega = \omega_C = 1/RC$).

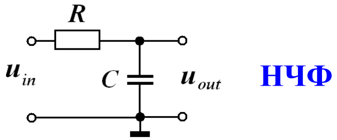
$$|K_U| = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{\omega^2\tau_{RC}^2}}} \qquad \varphi = \arctan \frac{1}{\omega\tau_{RC}}$$



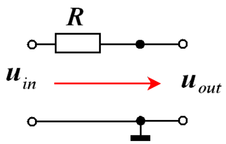


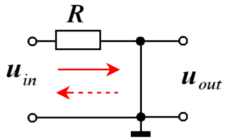
Как да запомним коя RC верига какъв филтър представлява?

❖ Нискочестотен филтър (**НЧФ**)



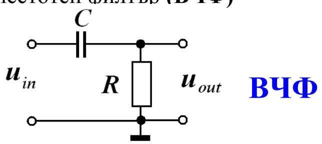
НЧФ с RC верига има паралелен на изхода кондензатор. Понеже импедансът му се мени с честотата, това определя действието на филтъра.



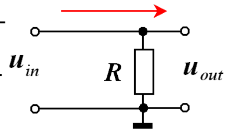


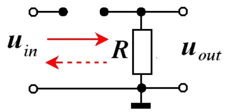
Импедансът на C е $|X_C| = 1/\omega C$. При ниски честоти $|X_C| \to \infty$ и веригата на C остава “отворена”. Затова нискочестотните сигнали “излизат” на изхода. Обратно, при високи честоти $|X_C| \to 0$ и веригата на C се “закъсява”. Сега високочестотните сигнали “излизат” на “земя”, а не на изхода.

❖ Високочестотен филтър (**ВЧФ**)



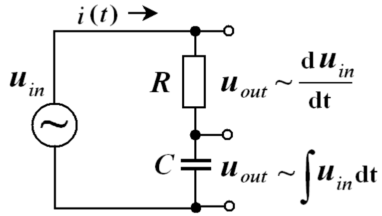
ВЧФ с RC верига има последователен на изхода кондензазатор. Понеже импедансът му се мени с честотата, това определя действието на филтъра.





Импедансът на C е $|X_C| = 1/\omega C$. При високи честоти $|X_C| \to 0$ и веригата на C се “закъсява”. Високочестотните сигнали “излизат” на изхода. Обратно, при ниски честоти $|X_C| \to \infty$ и веригата на C е “отворена”. Затова нискo-честотните сигнали сега не могат да “излязат” на изхода.

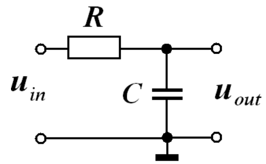
RC веригата като формираща верига



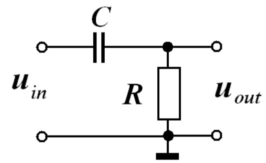
Веригите с RC и RL елементи могат да се използват и като верига за формиране на импулси – аналогово диференциране и интегриране. За пример е дадена отново последователната RC верига. На входа й се подава обикновено правоъгълен импулс, а на всеки от двата изхода (u_C или u_R) се наблюдава интегрирания или диференцирания сигнал от изхода.

❖ Случай 4: Формиращи вериги (импулсен режим)

❖ RC верига като интегрираща верига

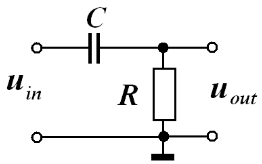


❖ RC верига като диференцираща верига



$$u_{in}(t) = Ri(t) + \frac{1}{C}\int i(t)dt$$

Диференцираща RC верига



Диференциращата верига използва за изход краищата на резистора. Следователно

$$u_{out}(t) = Ri(t); \quad \Rightarrow i(t) = \frac{u_{out}(t)}{R}$$

Заместваме в общия израз и извършваме необходимите преобразувания:

$$\frac{d}{dt}u_{in}(t) = \frac{d}{dt}u_{out}(t) + \frac{u_{out}(t)}{RC} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{du_{out}(t)}{dt} + \frac{1}{\tau_{RC}}u_{out}(t) = \frac{du_{in}(t)}{dt}$$

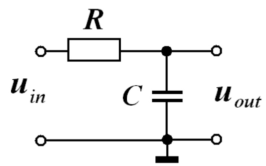
Нека да изберем така стойностите R и C на елементите на RC верига, така че нейната времеконстанта τ_{RC} на да бъде малка величина:

$$\tau_{RC} = RC \langle\langle\, 1 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{du_{out}(t)}{dt} \langle\langle\, \frac{1}{\tau_{RC}}u_{out}(t)$$

Така при направеното допускане изходното напрежение на диференциращата RC верига е пропорционално на производната на входното с точност до множител, равен на τ_{RC}:

$$\Rightarrow \quad u_{out}(t) \cong \tau_{RC}\frac{du_{in}(t)}{dt}$$

Интегрираща RC верига



Интегриращата верига използва за изход краищата на кондензатора. Следователно

$$u_{out}(t) = \frac{1}{C}\int i(t)dt; \quad \Rightarrow \frac{d}{dt}u_{out}(t) = \frac{i(t)}{C};$$

$$\Rightarrow i(t) = C\frac{d}{dt}u_{out}(t)$$

Отново заместваме в общия израз:

$$u_{in}(t) = \tau_{RC}\frac{du_{out}(t)}{dt} + u_{out}(t)$$

При интегриращата верига се избират други стойностите R и C; сега времеконстанта τ_{RC} на RC веригата трябва да бъде голяма:

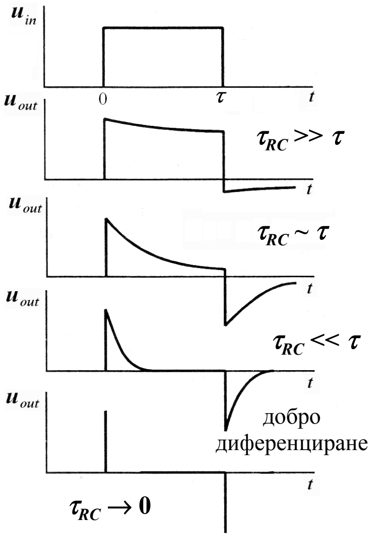
$$\tau_{RC} = RC \,\rangle\rangle\, 1 \qquad \Rightarrow \qquad \tau_{RC}\frac{du_{out}(t)}{dt} \,\rangle\rangle\, u_{out}(t)$$

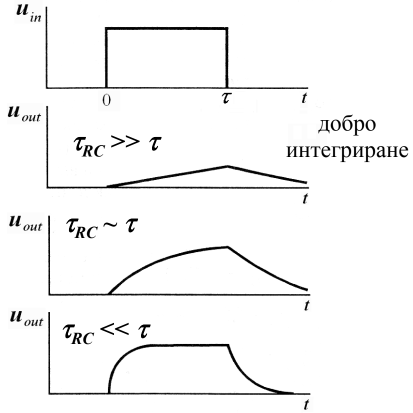
При направеното допускане изходното напрежение на интегриращата RC верига е пропорционално на производната на входното с точност до множител, равен на $1/\tau_{RC}$:

$$\tau_{RC}\frac{du_{out}(t)}{dt} = u_{in}(t) \qquad \Rightarrow \quad u_{out}(t) \cong \frac{1}{\tau_{RC}}\int u_{in}(t)\,dt$$

Примери за диференциране и интегриране на правоъгълен импулс

Дадени са времевите зависимости на входен правоъгълен импулс с продължителност τ, и на съответните изходни сигнали от диференцираща и интегрираща верига с различни съотношения на времеконстанта на RC веригата τ_{RC} спрямо продължителността τ.





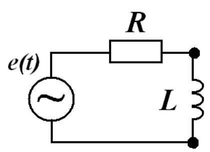
Резултатите показват, че критериите за добро интегриране и добро диференциране се изпълняват при противоположни изисквания за съотношение между времеконстанта на RC веригата τ_{RC} и продължителността на импулса τ.

Лекция 6

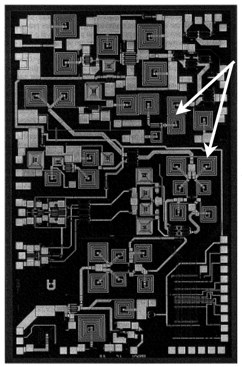
6.3 RL вериги като аналози на RC веригите. Сложни RLC вериги – примери

RC и RL вериги

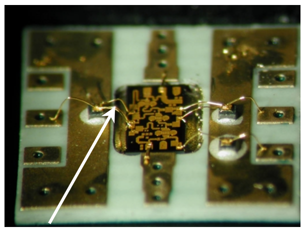
Както отбелязахме, RL веригите се използват по-рядко от RC веригите в традиционната електроника поради по-големите размери на бобините и по-нестабилните параметри на индуктивността им, както и наличието на нежелана взаимна индуктивност. В съвременните интегрални схеми, особено на по-високи честоти, се използват по-технологични SMT и планарни бобини, които позволяват да се засили използваемостта и на RL веригите, както и на RLC веригите. В лекциите няма да разглеждаме подробно RL веригите – те имат аналогични свойства на RC веригите в установен и преходен режим, като филтри, диференциращи и интегриращи вериги. По-нататък ще дадем само много кратки примери за последователна RL верига. На студентите се дава възможност сами да ги развият примерите по аналогия.



$$Z = R + j\omega L$$



планарни бобини във високочестотни IC



Самите жични бондове в корпусираните IC имат силен индуктивен характер

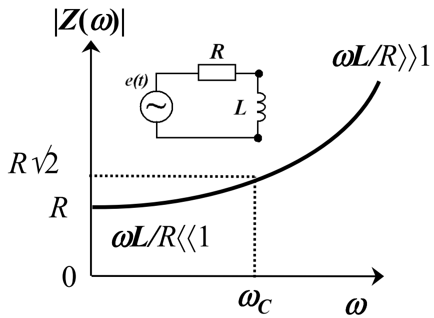
Последователна RL верига в установен режим

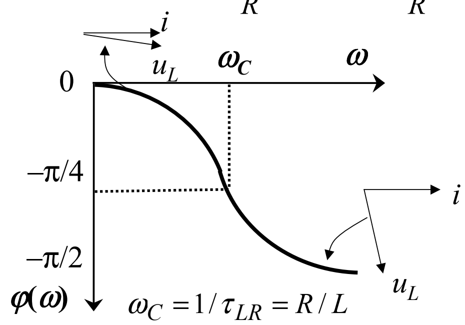
Подобно на RC веригата записваме закона на Ом за RL веригата и изразяваме импедансът й.

$$e(t) = R\,i(t) + L\frac{di(t)}{dt} = u_R(t) + u_L(t)$$

Дадени са графики на честотните характеристики на модула и фазата на импеданса. Коментар: при ниски честоти ($\omega L/R \langle\langle 1$) $|Z| = R$ е минимално, фазата между тока и напрежението U_L е ~0 (т.е. индуктивността L не оказва практическо влияние във веригата). Обратно, при високи честоти ($\omega L/R \rangle\rangle 1$) $|Z|$ расте до ωL, а напрежението U_L “изостава” по фаза тока с $-\pi/2$ (т.е. R практически не оказва влияние). Веригата има критична честота $\omega_C = R/L$, при която $|Z| = R\sqrt{2} = 1.41R$, а напрежението “изостава” по фаза тока с $-\pi/4$.

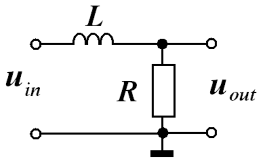
$$|Z(\omega)| = \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2} = \sqrt{1 + \omega^2 \tau_{RL}^2} \qquad \varphi(\omega) = -\arctan\frac{\omega L}{R} \qquad \tau_{RL} = \frac{L}{R}$$





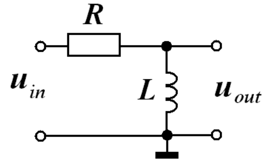
RL веригата като четириполюсник – филтър

❖ RL верига като нискочестотен филтър



$$K_U = \frac{R}{R + j\omega L} = \frac{1}{1 + j\omega\tau_{RL}}$$

❖ RL верига като високочестотен филтър



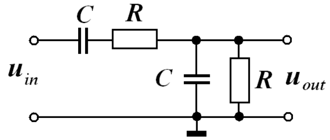
$$K_U = \frac{j\omega L}{R + j\omega L} = \frac{1}{1 - j\dfrac{1}{\omega\tau_{RL}}}$$

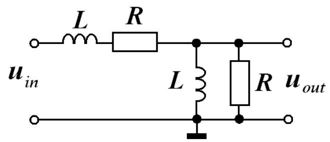
Както RC веригите, RL веригите също могат да се разглеждат като четириполюсници: напр. като филтри, интегриращи и диференциращи вериги и др. На фигурите е дадено най-популярното им приложение като НЧФ и ВЧФ, и са записани техните комплексни коефициенти на предаване по напрежение. Използвайки опита си от RC веригите, студентите могат сами да обяснят действието на филтрите. Трябва да се обърне внимание на фактът, че импедансът на L е $|X_L| = \omega L$. При ниски честоти $|X_L| \to 0$ и веригата на L се "закъсява", а при високи честоти $|X_L| \to \infty$ и веригата на L остава "отворена". Като имат в предвид тези свойства на импеданса, студентите могат сами да обяснят филтриращите свойства на показаните горе схеми. По същия начин може да се определи коя от посочените схеми има диференциращи и коя – интегриращи свойства. (повече информация за филтрите - в Лекция 8).

Сложни RC, RL и RLC вериги

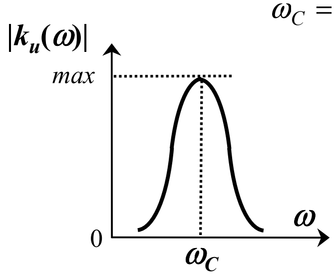
В електрониката се срещат много по-сложни веригите с включени последователни или паралелни двойки R/C и R/L елементи и множество комбинации от тях. Тези вериги се използват най-често в т.н. трептящи кръгове (Лекция 7), електронните филтри (Лекция 8), предавателните линии (Лекция 9) и др. подобни вериги. Методите за анализ на подобен тип вериги са същите, които използвахме при подробното разглеждане на RC веригите.

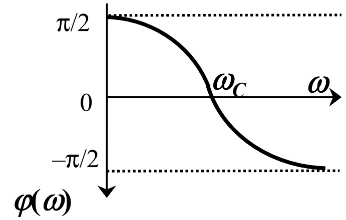
❖ Пример: Лентово-пропускащи филтри с последователни и паралелни RC/RL вериги





$$\omega_C = 1/RC; \qquad \omega_C = R/L$$

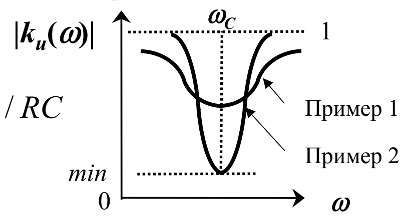




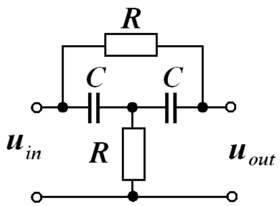
Мост на Вин и двоен Т-мост

На предната страница са показани лентово-пропускащи филтри ЛПФ, които "пропускат" (филтрират) на изхода си сигнали само в определена честотна лента. Обратно, тук е даден друг пример за лентово-запиращ филтър ЛЗФ или режекторен филтър. Това е устройство, което "пропуска" (филтрира) на изхода си сигнали в целия честотен обхват, с изключение на сигнали в определена лента ("режекция"). Дадени са два филтъра с еднаква критична честота, но различна избирателност (стръмност) на лентата на режекция. Опитайте се да определите коефициентът на предаване на двата филтъра и го сравнете (напр. по метода на комплексните кръгови токове. Двойният Т-мост го разделете на 2 единични Т-моста като успоредно свързани четириполюсници. Анализирайте всеки поотделно и след това намерете общата Y-матрица

$$\omega_C = 1/RC$$



❖ Пример 2: Мост на Вин



❖ Пример 2: Двоен Т-мост